1922

THÈSE

PRESENTEE

A L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Jean-Marie NORMAND

DESCRIPTION MICROSCOPIQUE DE LA DIFFUSION DE NEUTRONS DE BASSE ENERGIE PAR LES NOYAUX

Soutenue le 25 Juin 1975 devant la Commission d'Examen

MM.	M.R. ARVIEU	Président
	M.V. GILLET	
Mme	P. BENOIST-GUEUTAL	Examinateurs
	M.J. RAYNAL	
	M.M. GOLDMAN	

THÈSE

PRESENTEE

A L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Jean-Marie NORMAND

DESCRIPTION MICROSCOPIQUE DE LA DIFFUSION DE NEUTRONS DE BASSE ENERGIE PAR LES NOYAUX

Soutenue le 25 Juin 1975 devant la Commission d'Examen

MM.	M.R. ARVIEU	Président
	M.V. GILLET	
Mme	P. BENOIST-GUEUTAL	Examinateurs
	M.J. RAYNAL	
	M.M. GOLDMAN	

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

REMERCIEMENTS

Je remercie le Commissariat à l'Energie Atomique et plus particulièrement le Service de Physique Théorique de la Division de la Physique, pour les facilités de travail qui m'ont été accordées.

Je veux exprimer ma profonde gratitude à la mémoire du Professeur *C. BLOCH* pour m'avoir accueilli dans le Service de Physique Théorique, et m'avoir encouragé dans mes premiers travaux.

Monsieur le Professeur *R. ARVIEU* a bien voulu patronner cette thèse et je lui en suis très reconnaissant.

Je tiens aussi à remercier Madame le Professeur *P. BENOIST-GUEUTAL* et Monsieur *M. GOLDMAN* d'avoir accepté de faire partie de ce Jury.

Le travail présenté a été suscité par Monsieur le Professeur *A. ABRAGAM*, je le remercie pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail.

Je remercie également Monsieur *P. MERIEL* pour les précisions qu'il m'a apportées sur la situation expérimentale de la diffusion des neutrons thermiques.

Monsieur *V. GILLET* a dirigé mes premiers travaux en physique nucléaire. Je l'en remercie très sincèrement.

Je tiens a remercier *J. RAYNAL* qui a suivi les développements de cette thèse et m'a prodigué de nombreux conseils et suggestions.

Ce travail à nécessité de nombreux calculs numériques. Je remercie Madame *N. TICHIT* de l'aide qu'elle m'a apportée pour la mise au point des programmes.

Madame *C. LE GALL* a dactylographié le texte et Mesdames *A. GERVOIS* et *M. PORNEUF* ont bien voulu le relire et le corriger. Je leur exprime mes plus vifs remerciements.

Ma femme a accepté la tâche ingrate de relire la première rédaction, je lui en suis extrêmement reconnaissant.

TABLE DES MATIERES

I. INTRODUCTION. 1

II. TRAITEMENT DU CONTINU DANS LE CADRE D'UN MODELE DES COUCHES. 6

II.1. Hamiltonien et espace de configurations. 7

II.1.1. Le hamiltonien. 7

II.1.2. L'espace de configurations. 7

II.2. L'équation de Schrödinger. 10

II.3. Résolution des équations. 13

II.3.1. L'étape de prédiagonalisation. 13

II 3.2. Schéma de résolution en représentation énergie. 15

II.3.3. Résolution en représentation position. 17

II.4. Le problème de l'antisymétrisation. 21

II.4.1. Orthogonalité entre états individuels liés et de diffusion. 21

II.4.2. Elimination dans un espace modèle des états $|ni\rangle$ inoccupés dans le noyau résiduel. 22

II.4.3. Importance des termes correctifs d'antisymétrisation. 26

II.5. Avantages de la description considérée pour les états à N nucléons. 28.

III. APPLICATION A LA DIFFUSION DE NEUTRONS DE BASSE ENERGIE. 33

III.1. Formulation du problème. 33

III.1.1. Diffusion à énergie nulle, "pseudo-magnétisme nucléaire". 34

III.1.2. Diffusion à énergie non nulle, théorie de la portée effective. 36

III.2. Choix du potentiel à un corps. 37

III 2.1. Détermination phénoménologique des énergies de particules indépendantes. 37

III.2.2. Les potentiels à un corps utilisés. 39

III.3 L'interaction à deux corps. 46

III.3.1. Interprétations des forces à deux corps effectives. 46

III.3.2. Paramètres de la force centrale. 46

III.3.3. Déterminations de la profondeur V_o. 50

III.4. Nouvelles troncatures de l'espace de configurations. 51

III.4.1. Etats de la cible, prédiagonalisation. 52

III.4.2. Configurations à N nucléons. 54

IV. TRAITEMENT DE L'ANTISYMETRISATION DANS DES CAS SIMPLES. 56

IV.1. Diffusion de neutrons de basse énergie dans un modèle simple d'espace de configurations. 56

IV.2. Discussion des résultats pour les noyaux magiques. 58

IV.2.1. Résultats pour C^{12}. 58

IV.2.2. Résultats pour O^{16}. 65

IV.2.3. Résultats pour Ca^{40}. 71

IV.3. Discussion des résultats pour les noyaux de spin non nul. 73

IV.3.1. Résultats pour C^{13}. 74

IV.3.2. Résultats pour O^{17}. 79

V. ANTISYMETRISATION DANS LE CAS D'UN MELANGE DE CONFIGURATIONS. 84

V.1. Approximation obtenue en négligeant le couplage avec les états liés à N = 20 nucléons. 85

V.1.1. Résultat dans cette approximation. 85

V.1.2. Prédiction dans un modèle simple, du rôle joué par le couplage avec les états liés à N nucléons. 90

V.2. Etude du couplage avec les états liés à N nucléons. 92

V.2.1. Résolution des équations. 92

V.2.2. Résonances et discussion des résultats dans deux modèles d'espace de configurations liées à N nucléons. 99

CONCLUSION. 111

APPENDICES.

A. DIFFRACTION DE NEUTRONS THERMIQUES. A3

A.1. Traitement général de la diffraction de neutrons thrmiques. A3

A.2. Applications, principe des mesures de B. A8

B. GENERALITES SUR LES REPRESENTATIONS DU GROUPE DES ROTATIONS. A11

B.1. Généralités sur les symétries. A11

B.2. Représentations unitaires de SU(2). A12

B.2.1. Algèbre de Lie de SU(2). A12

B.2.2. Correspondance entre SU(2) et SO(3). A13

B.2.3. Représentations unitaires irréductibles de SU(2). A13

B.3. Dépendance en un choix d'axes. A14

B.4. Grandeurs tensorielles, équivalence des représentations $\mathscr{D}^j$ et $\mathscr{D}^{j*}$. A16

B.4.1. Définition d'une grandeur tensorielle. A16

B.4.2. Equivalence des représentations $\mathscr{D}^j$ et $\mathscr{D}^{j*}$, variance. A16

B.4.3. Applications. A17

B.5. Grandeurs tensorielles invariantes, théorème de Wigner-Eckart. A19

B.5.1. Théorème de Wigner-Eckart. A19

B.5.2. Une formule de réduction du produit tensoriel. A20

B.6. Coefficients "9j carrés", technique graphique. A21

B.6.1. Définition et propriétés des "9j carrés". A21

B.6.2. Technique graphique. A22

B.6.3. Valeurs particulières de "9j carrés". A23

C. ESPACE DE HILBERT DES ETATS A UNE PARTICULE. A24

C.1. Espace de spineurs $\mathscr{E}_s$ et $\mathscr{E}_t$. A24

C.1.1. Espace de spin $\mathscr{E}_s$. A24

C.1.2. Espace d'isospin $\mathscr{E}_t$. A25

C.2. Partie spatiale, espace de Hilbert $\mathscr{E}_{\vec{r}}$. A26

C.3. Les états de base de l'espace $\mathcal{E}^{(1)}$. A27

C.3.1. Généralités. A27

C.3.2. Potentiels $v(r)$ utilisés : oscillateur harmonique et Wood-Saxon. A29

D. ETATS A N PARTICULES. A31

D.1. Antisymétrisation, couplage et normalisation. A31

D.1.1. Opérateur d'antisymétrisation. A31

D.1.2. Etats antisymétrisés et couplés. A33

D.1.3. Normalisation d'un état antisymétrisé. A35

D.2. Construction des états à N particules du problème. A37

D.2.1. Etats de la cible. A37

D.2.2. Définition des "coefficients associés au c.p.f.". A41

D.2.3. Etats de l'ensemble cible plus projectile. A46

E. CALCUL DES ELEMENTS DE MATRICE. A51

E.1. Décomposition en somme d'éléments de matrice à 1 et 2 corps. A51

E.2. Calcul des éléments de matrice à 2 corps particule-particule. A52

E.2.1. Expression en fonction des éléments de matrice directs. A52

E.2.2. Calcul de l'élément de matrice direct particule-particule. A53

E.3. Calcul des potentiels du problème. A58

E.3.1. Eléments de matrice à deux corps comprenant des états $|ri\rangle$. A59

E.3.2. Séparation des contributions coeur-coeur, coeur-externe et externe-externe. A60

F. METHODES NUMERIQUES DE RESOLUTION DES EQUATIONS. A63

F.1. Principe de la méthode numérique. A63

F.2. Intégration de l'équation de Schrödinger radiale à un corps. A63

F.2.1. Généralités. A63

F.2.2. Etats de diffusion ($\varepsilon \geq 0$). A65

F.2.3. Etats liés. A66

F.3. Résolution du système d'équations intégro-différentielles couplées. A68

F.3.1. Mise sous forme matricielle MX = Y. A68

F.3.2. Résolution numérique de l'équation matricielle MX = Y. A69

F.3.3. Comportement asymptotique de g(r) et résultats. A71

F.3.4. Calculs numériques. A72

REFERENCES. R1

LISTE DES FIGURES ET DES TABLEAUX

L'ensemble des résultats de ce travail est regroupé dans les figures et les tableaux dont nous donnons dès maintenant la liste.

Liste des Figures: Page

1 - Spectres des différents hamiltoniens du formalisme général. 14

2 - Energies expérimentales de particules et de trous pour le C^{12}. 38

3 - Energies expérimentales de particules et de trous pour O^{16}. 38

4 - Comparaison des potentiels et des états 2s d'un oscillateur harmonique et d'un puits de Wood-Saxon. 40

5 - Energie d'excitation négative pour déterminer V_o . 50

6 - Energie de liaison de l'état $1/2^+$ du C^{13} . 58

7 - Déphasages de l'onde s de diffusion de neutrons sur le C^{12} . 64

8 - Energie de liaison de l'état $1/2^+$ de O^{17}. 66

9 - Fonctions d'onde radiales 2s et de diffusion à énergie nulle dans le cas de O^{16} et d'un potentiel à un corps d'oscillateur harmonique. 67

10 - Fonctions d'onde radiales 2s et de diffusion à énergie nulle dans le cas de O^{16} et d'un potentiel à un corps de Wood-Saxon. 67

11 - Déphasage de l'onde s de diffusion de neutrons sur O^{16} . 70

12 - Déphasage de l'onde s de diffusion de neutrons sur le Ca^{40} . 73

13 - Energies de liaison des états 0^- et 1^- du C^{14} . 75

14 - Energies de liaison des états 2^+ et 3^+ de O^{18} . 80

15 - Spectre expérimental du F^{20} . 86

16 - Variations de la fonction $(\frac{\sin x}{x})^2$. A7

17 - Construction de la matrice M et du second membre Y pour la résolution numérique. A70

Liste des Tableaux:

1 - Ordres de grandeur des paramètres des neutrons thermiques. A3

2 - Paramètres de l'oscillateur harmonique. 41

3 - Paramètres du potentiel de Wood-Saxon. 41

4 - Potentiels de Wood-Saxon pour les états à une particule du C^{12}. 43

5 - Potentiels de Wood-Saxon pour les états à une particule du C^{13}. 43

6 - Potentiels de Wood-Saxon pour les états à une particule de O^{16}. 44

7 - Potentiels de Wood-Saxon pour les états à une particule de O^{17}. 44

Page

8 - Potentiels de Wood-Saxon pour les états à une particule du F^{19}. 45

9 - Paramètres des forces centrales à deux corps. 49

10 - Configurations antisymétrisées à deux nucléons dans la couche 2s-1d en couplage j-j . A39

11 - Mélanges de configurations décrivant le fondamental du F^{19} . 53

12 - Profondeurs de la force à deux corps utilisées pour le C^{12} . 59

13 - Energies coulombiennes des noyaux magiques. 61

14 - C^{12}, longueur de diffusion et portée effective, avec un potentiel à un corps d'oscillateur harmonique. 62

15 - C^{12}, longueur de diffusion et portée effective avec des potentiels à un corps de Wood-Saxon. 63

16 - C^{12}, déphasages de l'onde s . 64

17 - Profondeurs de la force à deux corps utilisées pour O^{16} . 66

18 - O^{16}, longueur de diffusion et portée effective avec un potentiel à un corps d'oscillateur harmonique. 68

19 - O^{16}, longueur de diffusion et portée effective avec des potentiels à un corps de Wood-Saxon. 69

20 - O^{16}, déphasage de l'onde s . 70

21 - Ca^{40}, longueur de diffusion et portée effective avec un potentiel à un corps d'oscillateur harmonique. 72

22 - C^{13}, longueurs de diffusion et portées effectives avec un potentiel à un corps d'oscillateur harmonique. 76

23 - C^{13} et O^{17}, longueurs de diffusion et portées effectives avec des potentiels à un corps de Wood-Saxon. 77

24 - Eléments de matrice de l'interaction résiduelle pour le C^{14} . 79

25 - O^{17}, longueurs de diffusion et portées effectives avec un potentiel à un corps d'oscillateur harmonique. 81

26 - Eléments de matrice de l'interaction résiduelle pour O^{18} . 83

27 - F^{19}, longueurs de diffusion et portées effectives avec un potentiel à un corps d'oscillateur harmonique. 87

28 - F^{19}, longueurs de diffusion et portées effectives avec un potentiel à un corps de Wood-Saxon. 89

29 - Norme n de la configuration $|(F^{19},2s1/2)J, T=1\rangle$. 91

30 - Configurations antisymétrisées à quatre nucléons en couplage j-j dans la couche 2s-1d, couplées à J=0, T=1 . 93

31 - Configurations antisymétrisées à quatre nucléons en couplage j-j dans la couche 2s-1d, couplées à J=1, T=1 . 94

32 - Energie de liaison nucléaire de la configuration $|(F^{19},2s1/2)J, T=1\rangle_n$. 98

33 - F^{19}, longueurs de diffusion en introduisant le couplage avec les états à 20 nucléons liés, force de Serber. 102

34 - F^{19}, longueurs de diffusion en introduisant le couplage avec les états à 20 nucléons liés, force I.G.E. 1 . 104

35 - Composantes de l'état quasi-lié dans les voies J=0 et J=1 , en utilisant la force de Serber. 106

36 - Composantes de l'état quasi-lié dans les voies J=0 et J=1 , en utilisant la force de I.G.E. 1 . 108

DESCRIPTION MICROSCOPIQUE DE LA DIFFUSION DE NEUTRONS DE BASSE ENERGIE PAR LES NOYAUX

Chapitre I

INTRODUCTION

La diffusion d'un rayonnement sur une structure périodique de centres diffuseurs donne lieu au phénomène de diffraction.

De même que celle de rayons X, la diffraction de neutrons thermiques a permis de résoudre de nombreux problèmes de structure cristalline. Le caractère complémentaire de ces deux techniques est lié à la nature différente des interactions mises en jeu. Les rayons X sont diffusés par les électrons de l'atome, les neutrons le sont également par les nucléons du noyau. En raison de l'existence d'un moment magnétique pour le neutron, l'amplitude de diffusion présente à la fois un terme de couplage avec le moment magnétique atomique du cortège électronique et un terme de couplage avec le spin du noyau. Ce dernier terme d'interaction nucléaire peut être interprété de façon semblable à celui d'interaction magnétique en introduisant un "pseudo-moment magnétique nucléaire" (A. Abragam[1]).

La diffusion des neutrons thermiques s'est révélée une technique de choix pour l'étude du magnétisme à l'échelle de l'atome. La production récente de structures antiferromagnétiques-nucléaires[2], a donné aux physiciens du solide l'espoir que la même technique pourrait être utilisée pour l'étude du magnétisme à l'échelle du noyau.

La diffusion de neutrons thermiques sur un noyau de spin I non nul, a lieu dans les deux voies de réaction $J = I \pm 1/2$ correspondant aux longueurs de diffusion $b_{\pm}$, que l'on écrit sous la forme :

$$b_{\pm} = A + B\left(\vec{I}\cdot\vec{\sigma}\right)_{\pm} \quad . \qquad \text{(I-1)}$$

La question posée aux physiciens nucléaires est la suivante : quels sont les noyaux pour lesquels la différence $b_+ - b_-$ des longueurs de diffusion est suffisamment grande en valeur absolue, pour permettre des observations de structures magnétiques nucléaires ordonnées ?

Seule la longueur de diffusion cohérente A :

$$A = \frac{I}{2I+1} b_- + \frac{I+1}{2I+1} b_+ \quad , \qquad \text{(I-2)}$$

est bien connue expérimentalement pour la plupart des noyaux[3]. Par contre, la valeur de $b_+ - b_-$, reliée à B par

$$B = \frac{2}{2I+1} (b_+ - b_-) \quad , \qquad \text{(I-3)}$$

n'a été mesurée à ce jour, que pour un petit nombre d'entre eux[4,5,6,7].

On montre dans l'appendice A comment s'effectue la détermination des paramètres A et B, par diffusion de neutrons sur un réseau.

Nous avons abordé le problème théorique de la détermination de ces longueurs de diffusion de façon microscopique, essentiellement pour deux raisons :

1- la quantité d'information que l'on cherche à obtenir étant réduite, un modèle simple, type potentiel optique, ne serait qu'une paramétrisation des résultats ;

2- à basse énergie, l'antisymétrisation complète de l'ensemble cible plus neutron incident joue un rôle important dont il faut tenir compte.

Notre travail portera particulièrement sur l'étude de ce problème de l'antisymétrisation dans un modèle microscopique.

Le formalisme que nous présentons au chapitre II, a été introduit par V. Gillet et C. Bloch[8] pour décrire les réactions du type nucléon-noyau et développé par C. Bloch à l'Ecole d'Eté de Varenna (1965)[9].

La méthode repose sur un choix particulier d'espace de configurations restreint et constitue une extension directe du modèle des couches aux états ayant une particule dans le continu. Le hamiltonien H du problème à N nucléons est ainsi décomposé en un hamiltonien H_o de particules indépendantes et une interaction résiduelle. L'espace de configurations restreint considéré est engendré par les états de particules indépendantes antisymétrisés, états propres du hamiltonien H_o et comprenant au plus un nucléon non lié. En principe la méthode ne nécessite

aucune autre approximation. L'antisymétrisation complète des états à N nucléons est introduite dès le début et sera rigoureusement conservée tout au long des calculs ; par suite, les termes d'échange des collisions sont traités exactement.

En écrivant l'équation de Schrödinger dans la base propre de H_o sur l'espace de configurations restreint, on obtient un ensemble d'équations couplées. Celles-ci peuvent être résolues en représentation énergie ou en représentation position. C'est cette dernière méthode que nous utilisons car le caractère à courte portée des interactions nucléaires justifie la troncature du domaine de variation de r (distance cible-nucléon) à une valeur finie, grande par rapport aux portées caractéristiques des potentiels. De plus, en représentation position, le rôle joué par le principe de Pauli apparaît explicitement dans les équations, en particulier sous forme de termes correctifs d'antisymétrisation. Ces termes assurent l'orthogonalité entre les états individuels de diffusion cherchés et les états liés à une particule du potentiel à un corps.

Ce formalisme est appliqué à l'étude de la diffusion de neutrons de basse énergie par les noyaux suivants : C^{12}, C^{13}, O^{16}, O^{17}, F^{19} et Ca^{40}.

La diffusion dans l'onde s est seule introduite, ce qui est justifié pour des neutrons thermiques dont l'énergie est de l'ordre du centième d'électron-volt.

Nous négligeons les excitations de la cible par le neutron incident en nous limitant aux voies de réaction définies par le fondamental de la cible. Néanmoins, le couplage avec certaines voies de réaction fermées, correspondant à des états excités de la cible, est introduit en approchant la configuration à N nucléons décrivant chacune de ces voies par un état quasi-lié formé par une combinaison linéaire d'états liés de particules indépendantes. On néglige donc les composantes dans le continu de ces voies de réaction fermées.

Nous définissons aux chapitre III, le hamiltonien et les espaces de configurations considérés pour chacun des noyaux étudiés.

Dans le cas des noyaux magiques C^{12}, O^{16} et Ca^{40}, ainsi que pour les noyaux voisins C^{13} et O^{17}, qui sont bien décrits en première approximation par un état unique de particules indépendantes, le problème est traité au chapitre IV, dans un modèle simple d'espace de configurations restreint. Celui-ci est limité à l'état fondamental de la cible (N-1 nucléons) plus un neutron dans le continu et au seul état lié à N nucléons obtenu par antisymétrisation du

fondamental de la cible avec l'état à une particule s, lié et inoccupé.

Le problème d'antisymétrisation dans le cas d'un mélange de configurations est étudié au chapitre V pour le F^{19}. Le fondamental de ce noyau est décrit par un mélange de configurations dans la couche 2s-1d, obtenu par diagonalisation de l'hamiltonien complet dans le sous-espace des états à 19 nucléons liés.

Nous étudions deux modèles d'espace de configurations pour les états quasi-liés à N=20 nucléons, qui constituent deux approximations pour le couplage avec des voies fermées correspondant à des états excités du F^{19} plus un neutron lié.

Le hamiltonien H_o de particules indépendantes est introduit phénoménologiquement en utilisant d'une part les énergies expérimentales de particule et de trou, et d'autre part des fonctions d'onde radiales d'oscillateur harmonique et de Wood-Saxon.

Nous considérons une force à deux corps effective centrale. Afin de discuter le rôle du caractère d'échange des forces, nous utilisons plusieurs interactions.

Pour chaque noyau étudié, on détermine la longueur de diffusion et la portée effective correspondant aux voies de réaction considérées. Dans le cas des noyaux magiques C^{12}, O^{16} et Ca^{40}, on compare les déphasages de l'onde s à basse énergie, obtenus en résolvant les équations de diffusion, avec ceux donnés par l'approximation de la portée effective.

Les résultats présentés au chapitre IV pour les noyaux magiques et voisins, sont en accord satisfaisant avec les valeurs expérimentales des longueurs de diffusion cohérente et des déphasages.

On prédit une valeur du paramètre B, inconnu expérimentalement, pour les noyaux C^{13} et O^{17}.

Les corrections d'antisymétrisation avec l'état 1s sont de l'ordre de 10 à 15% sur la valeur des longueurs de diffusion, elles sont faibles sur les déphasages de l'onde s. Dans le cas du Ca^{40}, la correction d'antisymétrisation avec l'état 2s occupé est importante, aussi bien sur la longueur de diffusion que sur le déphasage.

Les résultats obtenus sont peu sensibles aux valeurs relatives des paramètres de mélange des forces à deux corps considérées, lorsque la profondeur de celles-ci est ajustée pour obtenir la longueur de diffusion cohérente expérimentale. La valeur de cette profondeur est la même pour les noyaux voisins C^{12} et C^{13}

d'une part, O^{16} et O^{17} d'autre part. De plus elle est très proche de la profondeur qui reproduit dans le formalisme utilisé, l'état lié à N nucléons identifié à un état excité du noyau cible plus un neutron lié.

Les résultats obtenus dans le cas d'un mélange de configurations pour le F^{19}, sont présentés au chapitre V. L'état 2s n'étant présent que dans certaines composantes décrivant le fondamental de ce noyau, pour traiter correctement l'antisymétrisation, nous devons introduire le couplage entre l'unique voie de réaction considérée, définie par le fondamental du F^{19}, et certains états à 20 nucléons liés. Ces derniers correspondent à une description des voies fermées, dont on néglige le continu en les approchant par des états quasi-liés. L'introduction de ces états constitue une description modèle du très grand nombre d'états excités du F^{20} d'énergie voisine de celle du fondamental du F^{19} plus un neutron à l'infini. Parmi ces niveaux, on a entre autres identifié expérimentalement des états de mêmes nombres quantiques 0^+ et 1^+ que ceux des voies considérées, et dont l'énergie rapportée au seuil de réaction est inférieure à 0.3 keV.

Nous comparons les résultats obtenus pour chacune des approximations suivantes:

1- en négligeant tous les termes correctifs d'antisymétrisation avec les états s liés,

2- en ne tenant compte que du terme correctif d'antisymétrisation avec l'état 1s,

3- en tenant compte des termes correctifs d'antisymétrisation avec les états 1s et 2s, comme si ce dernier était totalement occupé dans la cible,

4- enfin, en introduisant le couplage avec les états modèles à 20 nucléons liés.

Les résultats sont très sensibles à ces corrections,en particulier le paramètre B, égal à $b_+ - b_-$, change de signe suivant les états quasi-liés considérés. Des effets de résonance sont observés chaque fois que, dans le sous-espace des états liés, un état propre du hamiltonien complet a une faible énergie rapportée au fondamental de la cible plus un neutron à l'infini.

Nous avons développé la théorie du modèle des couches étendue aux états à un nucléon dans le continu, sous la forme qui nous a paru la mieux adaptée aux calculs numériques. Nous avons donné en appendices les détails nécessaires à la réalisation des calculs.

CHAPITRE II

TRAITEMENT DU CONTINU DANS LE CADRE D'UN MODELE DES COUCHES

Le formalisme que nous présentons a été développé en représentation énergie, par C. Bloch à l'Ecole d'Eté de Varenna (1965) [9].

Différents aspects théoriques de ce modèle sont regroupés dans la monographie de C. Mahaux et Hans A. Weidenmuller "Shell model approach to nuclear reactions", [10] où l'on trouvera également de nombreuses références relatives à des travaux effectués dans le cadre de ce formalisme.

II.1. HAMILTONIEN ET ESPACE DE CONFIGURATIONS.

II.1.1. Le hamiltonien.

Nous supposons que les degrés de liberté associés aux champs mésiques dans les noyaux peuvent être remplacés par des potentiels entre les nucléons, ces potentiels comportant éventuellement des forces d'échange. Le hamiltonien nucléaire modèle s'écrit donc :

$$H = T + V \quad , \tag{II-1}$$

où T est l'opérateur à un corps d'énergie cinétique,

$$T = \sum_{i=1}^{N} t_i \quad , \tag{II-2}$$

et V l'opérateur d'interaction entre nucléons. Par la suite, nous supposerons les forces à deux corps prépondérantes, mais cette hypothèse n'est pas nécessaire ici.

Suivant la méthode habituelle, séparons H en un hamiltonien non perturbé H_o de particules indépendantes et une interaction résiduelle v :

$$H = H_o + v \qquad \begin{cases} H_o = T + V^{(1)} \\ v = V - V^{(1)} \end{cases} \quad , \tag{II-3}$$

où $V^{(1)} = \sum_{i=1}^{N} v_i$ est un potentiel à un corps a priori arbitraire. Cependant, la troncature de l'espace de configurations(II.1.2) qui définira notre modèle sera faite en fonction des états de particules indépendantes propres de H_o. Par suite, $V^{(1)}$ devra être choisi très proche d'un champ moyen décrivant, à l'approximation d'un modèle de particules indépendantes, les états liés du noyau considéré.

Les potentiels à un corps que nous utiliserons sont (C.3.2) celui de l'oscillateur harmonique isotrope et un potentiel de Wood-Saxon avec terme spin-orbite.

II.1.2. L'espace de configurations

Les états propres du hamiltonien $h = t + v$ forment une base complète orthonormée de l'espace de Hilbert $\mathcal{E}^{(1)}$ des états à une particule (Appendice C).

Lorsque, pour les grandes distances, le potentiel à un corps tend vers une valeur finie, que l'on prendra égale à zéro, le spectre

de h présente une partie discrète correspondant aux états liés $|n\,i\rangle$ d'énergie ε_{ni} négative et une partie continue correspondant aux états de diffusion $|\varepsilon i\rangle$ d'énergie ε positive ou nulle. Nous désignerons par i l'ensemble des nombres quantiques supplémentaires nécessaires pour définir un état, cf. (C-25) $i \equiv \ell, s, j, m_j, t, m_t$.

Les relations de fermeture et d'orthogonalité s'écrivent respectivement :

$$\sum_{ni} |ni\rangle\langle ni| + \sum_{i} \int d\varepsilon\, |\varepsilon i\rangle\langle \varepsilon i| = \mathbb{1}\,, \qquad \text{(II-4)}$$

$$\langle ni | n'i'\rangle = \delta_{nn'}\,\delta_{ii'}\,, \quad \langle ni | \varepsilon i'\rangle = 0\,, \qquad \text{(II-5)}$$

$$\langle \varepsilon i | \varepsilon' i'\rangle = \delta(\varepsilon-\varepsilon')\,\delta_{ii'}\,.$$

Si le potentiel régulier v n'est pas borné pour les grandes distances, le spectre de h est entièrement discret et les états propres $|n\,i\rangle$ sont liés c'est à dire caractérisés par une fonction d'onde ayant un comportement exponentiellement décroissant à l'infini. Cependant, donnant un sens nouveau au mot "lié", défini phénoménologiquement en (III.2.2a), on sépare encore le spectre en états liés et états non liés. La relation de fermeture prend alors une forme analogue à (II-4) :

$$\sum_{ni} |ni\rangle\langle ni| = \underbrace{\sum_{ni} |ni\rangle\langle ni|}_{\text{"liés"}} + \underbrace{\sum_{ni} |ni\rangle\langle ni|}_{\text{"non liés"}} = \mathbb{1}\,. \qquad \text{(II-6)}$$

Par produit tensoriel antisymétrisé de ces états on construit une base complète orthonormalisée de l'espace des états physiques à N nucléons, $\mathscr{E}^{(N)}$ (D.1). Les fonctions d'onde correspondantes sont les déterminants de Slater construits avec les fonctions d'onde à une particule.

Ces états propres de H_o peuvent être classés suivant leur nombre d'états à une particule liés dans h (le mot "lié" ayant le sens précédemment défini pour un potentiel v non borné).

La méthode que nous exposons consiste à restreindre l'espace de configurations $\mathscr{E}^{(N)}$ au sous-espace engendré par les états de particules indépendantes comprenant au plus un nucléon non lié dans v. L'espace de configurations restreint est donc la somme directe de deux sous-espaces 1 et 2, le premier correspondant aux états à N nucléons liés et le second aux états à N-1 nucléons liés et un non lié. Nous dénotons ces états ainsi que leur énergie non perturbée par :

1- $\widetilde{|n_1 i_1, \cdots, n_N i_N\rangle}_n = |\tilde{\alpha}\rangle_n \qquad H_o |\tilde{\alpha}\rangle_n = E_\alpha |\tilde{\alpha}\rangle_n$ (II-7a)

2- $\widetilde{|n_1 i_1, \cdots, n_{N-1} i_{N-1}; \varepsilon i\rangle}_n = |\beta_\ell; \tilde{\varepsilon} i\rangle_n = |\tilde{\beta\varepsilon}\rangle_n$, (II-7b)

où β représente à la fois les nombres quantiques β_ℓ des nucléons liés et i de l'état non lié.

Le symbole $\sim$ indique que ces états sont totalement antisymétrisés (D-8). Les configurations du sous-espace 2, ayant dans le cas d'un potentiel borné, une particule dans le continu, ne sont pas normalisables. Cependant, la présence de l'indice n traduit le fait que ces états $|\tilde{\beta\varepsilon}\rangle_n$ sont définis (D-60) comme ceux, $|\tilde{\alpha}\rangle_n$, du sous-espace 1, avec le facteur de comptage $1/\sqrt{N!}$ (D-31).

L'état le plus général de l'espace de configurations restreint ainsi défini est donc la somme de deux composantes appartenant respectivement aux espaces 1 et 2 :

$$|\tilde{\Psi}\rangle = |\tilde{1}\rangle + |\tilde{2}\rangle = \sum_\alpha a_\alpha |\tilde{\alpha}\rangle_n + \sum_\beta \int d\varepsilon\, a_\beta(\varepsilon) |\tilde{\beta\varepsilon}\rangle_n . \qquad \text{(II-8)}$$

Le choix de normalisation précédent des états $|\tilde{\alpha}\rangle_n$ et $|\tilde{\beta\varepsilon}\rangle_n$, définit l'ensemble des composantes (a_α, $a_\beta(\varepsilon)$) à un facteur multiplicatif global près.

Dans ce qui suit, nous développerons le formalisme avec un état $|\tilde{\Psi}\rangle$ du type (II-8) correspondant au cas d'un potentiel v borné. La transposition au cas d'un potentiel non borné se fait en remplaçant l'intégrale sur ε par une somme sur l'indice discret n associé à des états à une particule définis comme non liés dans v .

La troncature de l'espace de configurations définit notre modèle, cela amène les remarques suivantes :

Cette troncature est caractéristique de tous les modèles des couches. Les résultats obtenus pour les états liés, en ne gardant que les premiers états excités de H_o, sont souvent très bons[11]. La troncature que nous effectuons est de même nature, de plus les premiers états excités de H_o appartiennent aux sous-espaces 1 et 2.

Cependant, cette troncature ne sera justifiée que si l'interaction résiduelle V est suffisamment faible pour que l'on puisse considérer les premiers états excités de H comme des combinaisons linéaires des premiers états excités de H_o.

Cette interaction résiduelle dépend du choix du potentiel à un corps $V^{(1)}$. Le fait que certains premiers états excités de H soient des mélanges de configurations ayant des composantes importantes sur des états propres de H_o d'énergie élevée, montre que cette interaction résiduelle ne peut être rendue arbitrairement petite.

On peut tenir compte partiellement des configurations omises en remplaçant l'interaction résiduelle $\mathcal{V}$ par une interaction effective [12].

La nature même du modèle limite son application à l'étude des réactions nucléon-noyau du type (γ,p), (γ,n) élastique ou inélastique avec éventuellement échange de charge.

Le hamiltonien H est invariant par translation alors que H_o ne l'est pas. La troncature de l'espace étant définie en terme des états propres de H_o, le modèle considéré brise cette invariance par translation. Dans le calcul des états liés cela introduit des états spurieux que l'on peut éliminer dans le cas d'un potentiel à un corps d'oscillateur harmonique. Cependant, il n'existe pas de méthode analogue pour les états de diffusion.

Pour la même raison, l'effet de recul n'est pas traité correctement. Cet effet pourra être négligé à basse énergie et pour un noyau cible suffisamment lourd.

II.2. L'EQUATION DE SCHRÖDINGER.

L'équation de Schrödinger indépendante du temps :

$$H\,|\widetilde{\Psi}\rangle = E\,|\widetilde{\Psi}\rangle \qquad \text{(II-9)}$$

sur l'espace de configurations restreint défini ci-dessus, s'écrit sous la forme de deux systèmes d'équations couplées :

$$\begin{cases} (H^{11} - E)\,|\widetilde{1}\rangle + H^{12}\,|2\rangle = 0 & \text{(II-10a)} \\ H^{21}\,|\widetilde{1}\rangle + (H^{22} - E)\,|2\rangle = 0 & \text{(II-10b)} \end{cases}$$

obtenus par projection sur les sous-espaces orthogonaux 1 et 2. L'opérateur hamiltonien a été séparé en quatre parties notées matriciellement avec les indices des espaces 1 et 2

$$H = \left(\begin{array}{c|c} H^{11} & H^{12} \\ \hline H^{21} & H^{22} \end{array}\right) \qquad \text{(II-11)}$$

La même décomposition permet d'écrire le potentiel résiduel $\mathcal{V} = V - V^{(1)}$ sous la forme

$$\mathcal{V} = \begin{array}{c|c} v^{11} & v^{12} \\ \hline v^{21} & v^{22} \end{array} \quad . \qquad \text{(II-12)}$$

Les éléments de matrice de v^{11}, ${}_n\langle\tilde{\alpha}|v|\alpha'\rangle_n$, sont des constantes dépendant des indices discrets α et α'. Ceux de v^{12} et v^{21}, ${}_n\langle\tilde{\alpha}|v|\beta\tilde{\varepsilon}\rangle_n$ et ${}_n\langle\tilde{\beta\varepsilon}|v|\tilde{\alpha}\rangle_n$ respectivement, sont des fonctions de ε dépendant des indices discrets α et β.

Les éléments de matrice de v^{22} nécessitent une attention particulière; suivant (D-25) ils s'écrivent :

$${}_n\langle\widetilde{\beta\varepsilon}\,|\,\mathcal{V}\,|\,\widetilde{\beta'\varepsilon'}\rangle_n = {}_n\langle\widetilde{\beta_\ell(1,\cdots,N-1)}|\langle\varepsilon i(N)|\,\mathcal{V}\,\mathcal{A}(N-1,1)\,|\widetilde{\beta'_\ell(1,\cdots,N-1)}\rangle|\varepsilon' i'(N)\rangle . \qquad \text{(II-13)}$$

Pour un opérateur V à p corps, $\mathcal{V}$ est de la forme :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{p!}\sum_{i_1\neq i_p,1}^{N} \mathcal{V}_{i_1\cdots i_p} = \sum_{i_1<\cdots<i_p,1}^{N} \mathcal{V}_{i_1\cdots i_p} \quad , \qquad \text{(II-14)}$$

où l'on suppose $v_{i_1,\ldots,i_p}$ invariant par substitution sur les indices i_j.

Les termes de l'élément de matrice (II-13) correspondant à la substitution identité de l'opérateur $\mathcal{A}(N-1,1)$ et aux interactions $v_{i_1,\ldots,i_p}$ telles que i_p soit différent de N, donnent des contributions contenant une fonction δ sur les énergies, soit :

$${}_n\langle\widetilde{\beta_\ell}\,|\,\mathcal{V}_\ell\,|\,\widetilde{\beta'_\ell}\rangle_n\,\langle\varepsilon i|\varepsilon' i'\rangle = \delta(\varepsilon-\varepsilon')\,\delta_{ii'}\,{}_n\langle\widetilde{\beta_\ell}\,|\,\mathcal{V}_\ell\,|\,\widetilde{\beta'_\ell}\rangle_n \; . \qquad \text{(II-15)}$$

Le potentiel v_ℓ désigne la restriction de $\mathcal{V}$ au sous-espace des états à N-1 nucléons liés dans v .

Tous les autres termes de (II-13) sont des fonctions continues de ε et ε' Ainsi, les éléments de matrice de v^{22} se séparent en deux parties :

$${}_n\langle\widetilde{\beta\varepsilon}\,|\,\mathcal{V}\,|\,\widetilde{\beta'\varepsilon'}\rangle_n = \delta(\varepsilon-\varepsilon')\,\delta_{ii'}\,{}_n\langle\widetilde{\beta_\ell}\,|\,\mathcal{V}_\ell\,|\,\widetilde{\beta'_\ell}\rangle_n + {}_n\langle\widetilde{\beta\varepsilon}\,|\,\mathcal{V}_d\,|\,\widetilde{\beta'\varepsilon'}\rangle_n \; . \qquad \text{(II-16)}$$

Le premier terme v_ℓ, correspond à l'interaction entre les N-1 nucléons du noyau résiduel, la particule non liée étant spectatrice. Le deuxième terme v_d est associé aux échanges ou aux interactions entre la particule non liée et les particules liées dans h.

En introduisant l'expression (II-16) de v^{22} dans les équations (II-10) et projetant sur toutes les configurations non perturbées (II-7), nous obtenons le système d'équations couplées suivant :

$$\begin{cases} (E_\alpha - E)\, a_\alpha + \sum_{\alpha'} {}_n\langle \tilde{\alpha} | \mathcal{V} | \tilde{\alpha}' \rangle_n \, a_{\alpha'} + \sum_{\beta'} \int d\varepsilon' \, {}_n\langle \tilde{\alpha} | \mathcal{V} | \widetilde{\beta'\varepsilon'} \rangle_n \, a_{\beta'}(\varepsilon') = 0 & \text{(II-17a)} \\ \sum_{\alpha'} {}_n\langle \widetilde{\beta\varepsilon} | \mathcal{V} | \tilde{\alpha}' \rangle_n \, a_{\alpha'} + (E_{\beta_\ell} + \varepsilon - E)\, a_\beta(\varepsilon) \\ + \sum_{\beta'_\ell} {}_n\langle \tilde{\beta}_\ell | \mathcal{V}_\ell | \tilde{\beta}'_\ell \rangle_n \, \delta_{ii'} \, a_{\beta'}(\varepsilon) + \sum_{\beta'} \int d\varepsilon' \, {}_n\langle \widetilde{\beta\varepsilon} | \mathcal{V}_d | \widetilde{\beta'\varepsilon'} \rangle_n \, a_{\beta'}(\varepsilon') = 0 & \text{(II-17b)} \end{cases}$$

Si nous ajoutons les conditions aux limites qui déterminent les combinaisons linéaires de solutions indépendantes que l'on doit considérer pour un problème donné, ces équations contiennent toutes les informations permettant en principe de résoudre ce problème.

II.3. RESOLUTION DES EQUATIONS.

II.3.1. L'étape de prédiagonalisation.

Les amplitudes $a_\beta(\varepsilon)$ présentent des singularités qui déterminent le comportement asymptotique aux grandes distances de la fonction d'onde associée à $|\tilde{\Psi}\rangle$ et par suite la matrice S et les sections efficaces.

Nous vérifierons que le dernier terme des équations (II-17b), tout comme le premier est régulier en ε et reste fini quelles que soient les singularités. Eliminant ces termes de (II-17b), nous obtenons le système d'équations :

$$(E_{\beta_\ell} + \varepsilon - E)\, a_\beta(\varepsilon) + \sum_{\beta'_\ell} {}_n\langle \tilde{\beta}_\ell | v_\ell | \tilde{\beta}'_\ell \rangle_n \, \delta_{ii'}\, a_{\beta'}(\varepsilon) = 0 \quad . \qquad \text{(II-18)}$$

Les singularités de $a_\beta(\varepsilon)$ sont donc en $\varepsilon = E - E_{\gamma_\ell}$ où E_{γ_ℓ} est valeur propre du système d'équations :

$$(E_{\beta_\ell} - E_{\gamma_\ell})\, u^{\beta_\ell}_{\gamma_\ell} + \sum_{\beta'_\ell} {}_n\langle \tilde{\beta}_\ell | v_\ell | \tilde{\beta}'_\ell \rangle_n \, u^{\beta'_\ell}_{\gamma_\ell} = 0 \quad . \qquad \text{(II-19)}$$

C'est l'équation de Schrödinger pour les N-1 nucléons du noyau résiduel dans le sous-espace de configurations engendré par les états de particules indépendantes où tous les nucléons sont liés dans v. La résolution de ce problème séculaire, identique aux diagonalisations de l'interaction résiduelle dans le modèle des couches, donne le spectre (E_{γ_ℓ}) des états liés à N-1 nucléons dans l'approximation définie ci-dessus.

Les états propres normalisés correspondants :

$$|\tilde{\gamma}_\ell\rangle_n = \sum_{\beta_\ell} u^{\beta_\ell}_{\gamma_\ell} |\tilde{\beta}_\ell\rangle_n \quad , \qquad H|\tilde{\gamma}_\ell\rangle_n = E_{\gamma_\ell} |\tilde{\gamma}_\ell\rangle_n \quad , \qquad \text{(II-20)}$$

où les composantes $u^{\beta_\ell}_{\gamma_\ell}$ satisfont :

$$\sum_{\beta_\ell} u^{\beta_\ell *}_{\gamma_\ell} u^{\beta_\ell}_{\gamma'_\ell} = \delta_{\gamma_\ell \gamma'_\ell} \quad , \qquad \text{(II-21)}$$

forment une base complète orthonormalisée du sous-espace engendré par les états de particules indépendantes $|\tilde{\beta}_\ell\rangle_n$.

Les configurations $|\tilde{\gamma}_\ell\rangle_n$ ne sont pas nécessairement des états de particules indépendantes mais des combinaisons linéaires de tels états. En particulier, pour un hamiltonien H invariant par rotation dans les espaces de spin et d'isospin, les états $|\tilde{\gamma}_\ell\rangle_n$ seront couplés en spin et isospin.

L'ensemble des configurations $|\tilde{\gamma\varepsilon}\rangle_n$, obtenues en antisymétrisant et normalisant par le facteur de comptage $1/\sqrt{N}$ (D-60) les états propres à N-1 nucléons liés $|\tilde{\gamma}_\ell\rangle_n$ et les états individuels non liés $|\varepsilon i\rangle$:

$$|\tilde{\gamma\varepsilon}\rangle_n = \frac{1}{\sqrt{N}}\,\mathcal{A}(N-1,1)\,|\tilde{\gamma}_\ell(1,\cdots,N-1)\rangle_n\,|\varepsilon i(N)\rangle\,, \qquad \text{(II-22)}$$

forment une nouvelle base du sous-espace 2.

L'ensemble des nombres quantiques γ (γ_ℓ pour le noyau résiduel et i pour la particule non liée) définit une voie de réaction.

Sur cette nouvelle base le système d'équations (II-17) s'écrit :

$$\begin{cases} (E_\alpha - E)\,a_\alpha + \sum_{\alpha'} {}_n\langle\tilde{\alpha}|V|\tilde{\alpha}'\rangle_n\, a_{\alpha'} + \sum_{\gamma'}\int d\varepsilon'\, {}_n\langle\tilde{\alpha}|V|\tilde{\gamma'\varepsilon'}\rangle_n\, a_{\gamma'}(\varepsilon') = 0 & \text{(II-23a)} \\ \sum_{\alpha'} {}_n\langle\tilde{\gamma\varepsilon}|V|\tilde{\alpha}'\rangle_n\, a_{\alpha'} + (E_{\gamma_\ell} + \varepsilon - E)\,a_\gamma(\varepsilon) + \sum_{\gamma'}\int d\varepsilon'\, {}_n\langle\tilde{\gamma\varepsilon}|V_d|\tilde{\gamma'\varepsilon'}\rangle_n\, a_{\gamma'}(\varepsilon') = 0 & \text{(II-23b)} \end{cases}$$

Avant d'aborder la résolution de ce système d'équations, résumons les propriétés des hamiltoniens partiels que nous avons introduit (Fig. 1) sur l'espace de configurations restreint défini en (II.1.2) :

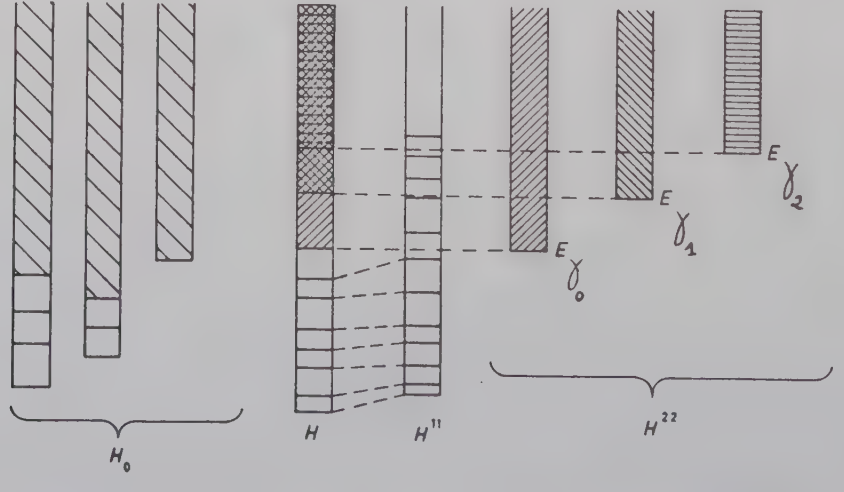


Figure 1 : Spectre des différents hamiltoniens partiels[9].

1- Le spectre du hamiltonien non perturbé H_o est une superposition de spectres présentant tous une partie continue correspondant à la valeur propre de la particule non liée.

2- Le spectre du hamiltonien exact présente une partie discrète et une partie continue. Cette dernière est une superposition de différents spectres continus commençant chacun aux énergies E_{γ_ℓ} du noyau résiduel à N-1 nucléons obtenu en isolant un nucléon.

3- La restriction H^{11} du hamiltonien H à l'espace 1, a un spectre entièrement discret. Les valeurs propres les plus basses sont en principe peu différentes de celles du hamiltonien exact car l'effet du couplage (par H^{12} et H^{21}) avec les états du continu doit être faible pour les états loin du seuil de H.

4- L'opérateur H^{22}, restriction de H à l'espace 2, présente un spectre entièrement continu identique à celui de H.

L'énergie $\varepsilon_{\gamma_\ell} = E - E_{\gamma_\ell}$ est celle d'une particule émise du système de N-nucléons laissant le noyau résiduel dans l'état $|\tilde{\gamma}_\ell\rangle_n$.

II.3.2. Schéma de résolution en représentation énergie.

C'est la méthode de résolution utilisée dans les calculs modèles de V. Gillet et C. Bloch[8], ainsi que dans l'étude de la résonance géante de O^{16} par J. Raynal, M.A. Melkanoff et T. Sawada[13].

Nous en rappelons uniquement les grandes lignes, développant en (II.3.3) la résolution en représentation position.

Les singularités des amplitudes $a_\gamma(\varepsilon)$ apparaissent clairement sur l'équation (II-23b). En effet, quand ε tend vers $\varepsilon_{\gamma_\ell} = E - E_{\gamma_\ell}$, le premier terme reste fini et on suppose qu'il en est de même du dernier (terme intégral) ; par suite $a_\gamma(\varepsilon)$ présente une singularité de la forme :

$$a_\gamma(\varepsilon) = A_\gamma\, \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\gamma_\ell}) + b_\gamma(\varepsilon) \quad , \quad b_\gamma(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to \varepsilon_{\gamma_\ell}]{} \frac{B_\gamma}{\varepsilon - \varepsilon_{\gamma_\ell}} \quad .$$

Ces singularités apparaissent uniquement pour les voies de réaction ouvertes correspondant à $\varepsilon_{\gamma_\ell}$ positive ou nulle soit : $E \geq E_{\gamma_\ell}$.

Nous vérifions que pour ces singularités les termes intégraux des équations (II-23) restent finis comme nous l'avions supposé. Cependant les intégrands présentant des pôles, on doit faire choix d'une convention pour définir

leurs valeurs en ces points singuliers. Cette convention est arbitraire, notons par $\mathcal{f}$ l'intégrale définie avec une convention particulière. Séparant le terme en fonction delta de $a_\gamma(\varepsilon)$, le système d'équations (II-23) s'écrit :

$$(E_\alpha - E)a_\alpha + \sum_{\alpha'} {}_n\langle\tilde{\alpha}|V|\tilde{\alpha}'\rangle_n a_{\alpha'} + \sum_{\gamma'} \mathcal{f} d\varepsilon' {}_n\langle\tilde{\alpha}|V|\tilde{\gamma}'\varepsilon'\rangle_n b_{\gamma'}(\varepsilon') = -\sum_{\gamma'} {}_n\langle\tilde{\alpha}|V|\tilde{\gamma}'\varepsilon_{\gamma'_\ell}\rangle_n A_{\gamma'} \qquad \text{(II-24a)}$$

$$\sum_{\alpha'} {}_n\langle\tilde{\gamma}\varepsilon|V|\tilde{\alpha}'\rangle_n a_{\alpha'} + (E_{\gamma_\ell}+\varepsilon-E)b_\gamma(\varepsilon) + \sum_{\gamma'} \mathcal{f} d\varepsilon' {}_n\langle\tilde{\gamma}\varepsilon|V_d|\tilde{\gamma}'\varepsilon'\rangle_n b_{\gamma'}(\varepsilon') = -\sum_{\gamma'} {}_n\langle\tilde{\gamma}\varepsilon|V_d|\tilde{\gamma}'\varepsilon_{\gamma'_\ell}\rangle_n A_{\gamma'} \quad . \qquad \text{(II-24b)}$$

Ces équations déterminent toutes les amplitudes a_α et $b_\gamma(\varepsilon)$ en fonction des A_γ.

Pour cela[9], on décompose $|\tilde{\Psi}\rangle$ sur les trois sous-espaces : le sous-espace 1 introduit précédemment, la partie du sous-espace 2 correspondant aux états "hors couche d'énergie" ($\varepsilon \neq \varepsilon_{\gamma_\ell}$) que nous notons encore 2 et l'espace 3 correspondant aux états de 2 sur "la couche d'énergie" ($\varepsilon = \varepsilon_{\gamma_\ell}$). Nous écrirons les trois composantes de $|\tilde{\Psi}\rangle$ sous la forme :

$$|\tilde{\Psi}\rangle = |\tilde{1}\rangle + |\tilde{b}\rangle + |\tilde{A}\rangle \qquad \begin{cases} |\tilde{1}\rangle = \sum_\alpha |\tilde{\alpha}\rangle_n a_\alpha \\ |\tilde{b}\rangle = \sum_\gamma \mathcal{f} d\varepsilon\, |\tilde{\gamma}\varepsilon\rangle_n b_\gamma(\varepsilon) \\ |\tilde{A}\rangle = \sum_\gamma |\tilde{\gamma}\varepsilon_{\gamma_\ell}\rangle_n A_\gamma \end{cases} \quad . \qquad \text{(II-25)}$$

Séparant les contributions de ces trois sous-espaces, les équations (II-24) s'écrivent symboliquement :

$$\begin{cases} (H^{11} - E)|\tilde{1}\rangle + V^{12}|\tilde{b}\rangle = -V^{13}|\tilde{A}\rangle & \text{(II-26a)} \\ V^{21}|\tilde{1}\rangle + (H^{22} - E)|\tilde{b}\rangle = -V^{23}|\tilde{A}\rangle \quad . & \text{(II-26b)} \end{cases}$$

Pour exprimer $|\tilde{b}\rangle$ en fonction de $|\tilde{A}\rangle$, on introduit un hamiltonien effectif résultant de l'élimination du sous-espace 1. Nous ne détaillons pas cette technique qui permet de définir une matrice de réactance K telle que :

$$|\tilde{B}\rangle = -K\,|\tilde{A}\rangle \quad . \qquad \text{(II-27)}$$

Il reste à établir le lien entre les coefficients A_γ, B_γ et la forme asymptotique aux grandes distances des fonctions d'onde. Dans la voie de réaction γ, on définit l'état individuel de diffusion par :

$$|\Psi_\gamma\rangle = \mathcal{f} d\varepsilon\, |\varepsilon\, i\rangle a_\gamma(\varepsilon) = |\varepsilon_{\gamma_\ell}\, i\rangle A_\gamma + \mathcal{f} d\varepsilon\, |\varepsilon\, i\rangle b_\gamma(\varepsilon). \qquad \text{(II-28)}$$

La valeur asymptotique aux grandes distances de la fonction d'onde associée au terme intégral de (II-28) est entièrement déterminée par le voisinage de la singularité de $b_\gamma(\varepsilon)$. Cette valeur dépend de la convention adoptée pour définir $\int$. Pour un choix particulier, on détermine par (II-28) le comportement asymptotique aux grandes distances de la fonction d'onde de $|\varphi_\gamma\rangle$ en fonction des coefficients A_γ et B_γ. En identifiant ce comportement asymptotique avec la somme d'une onde entrante et d'une onde sortante, on relie la matrice S à la matrice de réactance K.

Indiquons par exemple, qu'ayant défini l'intégrale $\int$ par la partie principale, on obtient :

$$S = e^{i\delta}\,\frac{1 - i\pi K}{1 + i\pi K}\,e^{i\delta}\,, \qquad \text{(II-29)}$$

où $e^{i\delta}$ est une matrice diagonale dont les éléments correspondent aux déphasages δ_γ des états de diffusion non perturbés $|\varepsilon\, i\rangle$ pour $\varepsilon = \varepsilon_{\gamma_\ell}$.

II.3.3. Résolution en représentation position.

Au lieu de résoudre le problème en représentation énergie, transformons les équations (II-23) en un système d'équations intégro-différentielles couplées de la variable radiale r.[13]

On évite ainsi les problèmes que pose la résolution pratique des équations en représentation énergie, en particulier le traitement de l'intégration sur l'énergie par discrétisation et troncature.[13]

Le caractère à courte portée des interactions nucléaires justifie en représentation position, la troncature du domaine de variation de r à une valeur finie, grande par rapport aux portées caractéristiques des potentiels. De plus, la résolution en représentation position conduit directement au comportement asymptotique à grande distance des fonctions d'onde, et donc aux sections efficaces.

En fonction des états individuels de diffusion $|\varphi_\gamma\rangle$définis par (II-28) le système d'équations (II-23) s'écrit :

$$\begin{cases} (E_\alpha - E)\,a_\alpha + \sum_{\alpha'} \langle \widetilde{\alpha} | V | \widetilde{\alpha'} \rangle_n a_{\alpha'} + \sum_{\gamma'} \langle \widetilde{\alpha} | V | \widetilde{\gamma'_\ell}\, \varphi_{\gamma'} \rangle_n = 0 & \text{(II-30a)} \\ \sum_{\alpha'} \langle \widetilde{\gamma\varepsilon} | V | \widetilde{\alpha'} \rangle_n a_{\alpha'} + (E_{\gamma_\ell} + \varepsilon - E)\,a_\gamma(\varepsilon) + \sum_{\gamma'} \langle \widetilde{\gamma\varepsilon} | V_d | \widetilde{\gamma'_\ell}\, \varphi_{\gamma'} \rangle_n = 0. & \text{(II-30b)} \end{cases}$$

Multiplions l'équation (II-30b) par le ket $|\varepsilon i\rangle$ et intégrons sur la variable continue ε .

Le deuxième terme de cette équation fait apparaître l'action de h sur l'état individuel de diffusion :

$$\int d\varepsilon\, (E_{\gamma_\ell} + \varepsilon - E)\, |\varepsilon i\rangle\, a_\gamma(\varepsilon) = (E_{\gamma_\ell} + h - E)\, |\varphi_\gamma\rangle \,. \qquad \text{(II-31)}$$

Les deux autres termes sont des sommes d'éléments de matrice de la forme ${}_n\langle \widetilde{\gamma\varepsilon}\,|\mathcal{V}|\,\widetilde{\ }\,\rangle_n$. Par application de (D-25), n'antisymétrisons totalement que le ket de ces éléments de matrice de façon à isoler l'état individuel $\langle \varepsilon i|$ appartenant à l'un des espaces $\mathcal{E}^{(1)}$ du produit tensoriel $\mathcal{E}^{(N)}$ (D-4), par exemple le $N^{\text{ième}}$, soit explicitement :

$${}_n\langle \widetilde{\gamma\varepsilon}\,|\mathcal{V}|\,\widetilde{\alpha'}\rangle_n = {}_n\langle \widetilde{\gamma_\ell(1,\cdots,N-1)}|\langle \varepsilon i(N)|\mathcal{V}|\widetilde{\alpha'}\rangle_n \sqrt{N} \,, \qquad \text{(II-32)}$$

$${}_n\langle \widetilde{\gamma\varepsilon}\,|\mathcal{V}_d\,|\,\widetilde{\gamma'_\ell\varphi_{\gamma'}}\rangle_n = {}_n\langle \widetilde{\gamma_\ell(1,\cdots,N-1)}|\langle \varepsilon i(N)|\mathcal{V}_d\,\mathcal{A}(N-1,1)\,|\widetilde{\gamma'_\ell(1,\cdots,N-1)}\rangle_n\,|\varphi_{\gamma'}(N)\rangle \,. \qquad \text{(II-33)}$$

Sur cet espace de Hilbert à un corps $\mathcal{E}^{(1)}_{(N)}$ ainsi isolé, on utilise la restriction de la relation de fermeture (II-4) au sous-espace des états ayant le même nombre quantique i que l'état individuel de diffusion, pour exprimer l'intégrale sur ε par :

$$\int d\varepsilon\, |\varepsilon i\rangle\langle \varepsilon i| = \mathbb{1}_i(N) - \sum_n |ni(N)\rangle\langle ni(N)| \,, \qquad \text{(II-34)}$$

où $\mathbb{1}_i(N)$ est l'opérateur identité sur ce sous-espace et $|ni\rangle$ un état lié.

Nous obtenons ainsi une nouvelle expression pour les équations (II-30b) :

$$\sum_{\alpha'} \Big[{}_n\langle \widetilde{\gamma_\ell}\,|\,\mathbb{1}_i(N)\,\mathcal{V}\,|\widetilde{\alpha'}\rangle_n - \sum_n |ni(N)\rangle_n\langle \widetilde{\gamma_\ell}\,|\langle ni(N)|\mathcal{V}|\widetilde{\alpha'}\rangle_n \Big] \sqrt{N}\, a_{\alpha'} + (E_{\gamma_\ell} + h - E)\,|\varphi_\gamma(N)\rangle$$
$$+ \sum_{\gamma'} \Big[{}_n\langle \widetilde{\gamma_\ell}\,|\,\mathbb{1}_i(N)\,\mathcal{V}_d\,|\widetilde{\gamma'_\ell\varphi_{\gamma'}}\rangle - \sum_n |ni(N)\rangle_n\langle \widetilde{\gamma_\ell}\,|\langle ni(N)|\mathcal{V}_d\,|\widetilde{\gamma'_\ell\varphi_{\gamma'}}\rangle \Big] = 0 \,. \qquad \text{(II-35)}$$

Outre les termes potentiels, il apparait des termes correctifs dépendant des états liés de même nombre quantique i que l'état individuel de diffusion $|\varphi_{\gamma'}\rangle$.

Ces derniers termes sont essentiels pour assurer l'antisymétrisation du nucléon diffusé avec ceux du noyau résiduel ; le paragraphe II.4 sera consacré à leur étude.

On obtient la représentation position en considérant la base propre de $|\vec{r}|$ et des autres opérateurs dont l'ensemble des nombres quantiques est désigné par i (on suppose qu'ils forment un ensemble complet d'observables qui commutent). Cette base satisfait les relations de fermeture et d'orthogonalité suivantes* :

$$\sum_i \int_0^\infty r^2 dr \; |ri\rangle\langle ri| = \mathbb{1} \quad , \tag{II-36}$$

$$\langle ri | r'i' \rangle = \frac{\delta(r-r')}{r^2} \delta_{ii'} \quad . \tag{II-37}$$

En particulier sur cette base, l'opérateur identité sur le sous-espace des états de nombre quantique i s'écrit :

$$\mathbb{1}_i = \int_0^\infty r^2 dr \; |ri\rangle\langle ri| \quad . \tag{II-38}$$

On définit les fonctions radiales (C-26) des états liés à une particule $|ni\rangle$ et de diffusion $|\varphi_\gamma\rangle$ respectivement par :

$$f_{ni}(r) = \langle ri | ni \rangle \quad , \quad \varphi_\gamma(r) = \langle ri | \varphi_\gamma \rangle \quad . \tag{II-39}$$

Décomposant $|\varphi_\gamma\rangle$ sur la base $(|ri\rangle)$ suivant :

$$|\varphi_\gamma\rangle = \int_0^\infty r^2 dr \; |ri\rangle \varphi_\gamma(r) \quad , \tag{II-40}$$

et projetant les équations (II-35) sur l'état $|ri\rangle$ de l'espace $\mathcal{E}^{(1)}_{(N)}$, on obtient l'ensemble des équations intégro-différentielles couplées de la variable r :

$$(E_\alpha - E) a_\alpha + \sum_{\alpha'} \langle \tilde{\alpha} | V | \tilde{\alpha}' \rangle_n a_{\alpha'} + \sum_{\gamma'} \int_0^\infty r'^2 dr' \langle \tilde{\alpha} | V | \gamma'_\ell, r'i' \rangle_n \varphi_{\gamma'}(r') = 0 \tag{II-41a}$$

$$\sum_{\alpha'} \left[\langle \gamma_\ell, ri | V | \tilde{\alpha}' \rangle_n - \sum_n f_{ni}(r) \langle \gamma_\ell, ni | V | \tilde{\alpha}' \rangle_n \right] \sqrt{N} \, a_{\alpha'} \tag{II-41b}$$

$$+ (E_{\gamma_\ell} - E) \varphi_\gamma(r) + \int_0^\infty r'^2 dr' \langle ri | h | r'i \rangle \varphi_\gamma(r')$$

$$+ \sum_{\gamma'} \int_0^\infty r'^2 dr' \left[\langle \gamma_\ell, ri | V_d | \gamma'_\ell, r'i' \rangle - \sum_n f_{ni}(r) \langle \gamma_\ell, ni | V_d | \gamma'_\ell, r'i' \rangle \right] \varphi_{\gamma'}(r') = 0$$

---

*Cette base n'appartient pas en fait à l'espace de Hilbert, n'étant pas normalisable.

Les potentiels à un corps que nous considérons (C.3.2) sont diagonaux sur la base ($|ri\rangle$).

En (E.3.1), on montre dans le cas d'un potentiel V à deux corps, comment le calcul des éléments de matrice comprenant des états $|ri\rangle$ permet de définir des potentiels locaux et non-locaux :

$$ {}_n\langle \tilde{\alpha} \mid V \mid \tilde{\gamma}_\ell \rangle_n |ri\rangle \sqrt{N} = W_{\alpha\gamma}(r) \qquad \text{(E-43)} $$

$$ \langle \gamma_\ell, ri \mid V_d \mid \gamma'_{\ell'}, r'i' \rangle = \frac{\delta(r-r')}{r^2} V^L_{\gamma\gamma'}(r) + V^{NL}_{\gamma\gamma'}(r,r'). \qquad \text{(E-44)} $$

D'où l'expression générale du système d'équations intégro-différentielles couplées :

$$ \begin{cases} (E_\alpha - E)\, a_\alpha + \sum_{\alpha'} \leq_n \tilde{\alpha} \mid V \mid \alpha' \rangle_n \, a_{\alpha'} + \sum_{\gamma'} \int_0^\infty r'^2 dr' \, W_{\alpha\gamma'}(r') \, \varphi_{\gamma'}(r') = 0 & \text{(II-42a)} \\ \sum_{\alpha'} \Big[W^*_{\alpha'\gamma}(r) - \sum_n f_{ni}(r) \int_0^\infty r'^2 dr' \, f^*_{ni}(r') \, W^*_{\alpha'\gamma}(r') \Big] a_{\alpha'} & \\ + \big[E_{\gamma_\ell} + h(r) - E \big] \varphi_\gamma(r) + \sum_{\gamma'} \Big\{ V^L_{\gamma\gamma'}(r) \varphi_{\gamma'}(r) + \int_0^\infty r'^2 dr' \, V^{NL}_{\gamma\gamma'}(r,r') \varphi_{\gamma'}(r') & \text{(II-42b)} \\ - \sum_n f_{ni}(r) \int_0^\infty r''^2 dr'' \, f^*_{ni}(r'') \Big[V^L_{\gamma\gamma'}(r'') \varphi_{\gamma'}(r'') + \int_0^\infty r'^2 dr' \, V^{NL}_{\gamma\gamma'}(r'',r') \varphi_{\gamma'}(r') \Big] \Big\}, & \end{cases} $$

où le hamiltonien radial h(r) est défini par (C-21, 22) :

$$ h(r) = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] + V_{\ell j}(r) \,, \qquad \text{(II-43)} $$

μ étant la masse réduite :

$$ \mu = \frac{N-1}{N} \, m \,. $$

Remarque : Dans le cas d'un hamiltonien H invariant par rotation dans les espaces de spin et d'isospin, on utilisera des états $|\tilde{\alpha}\rangle_n$ et $|\gamma_\ell, \tilde{ri}\rangle_n$ couplés en spin et isospin (D.2).

Les équations correspondant à ces états s'obtiennent par combinaison linéaire des équations (II-41) avec pour coefficients les produits de Clebsch-Gordan nécessaires aux couplages. La nature des équations (II-42) n'est pas modifiée, on doit seulement ajouter les nombres quantiques correspondant à ces couplages, le hamiltonien H couplant alors uniquement les voies de réaction correspondant aux mêmes spin et isospin total.

Les techniques utilisées pour résoudre numériquement le système d'équations (II-42), sont détaillées dans l'appendice F.

II.4. LE PROBLEME DE L'ANTISYMETRISATION.

II.4.1. Orthogonalité entre états individuels liés et de diffusion.

Dans le formalisme présenté ci-dessus, l'antisymétrisation complète des états à N nucléons est introduite dès le début en choisissant une base de particules indépendantes totalement antisymétrisée (II-7).

Le passage en représentation position à l'aide de la relation de fermeture (II-34) a introduit dans les équations (II-35), les termes correctifs suivants :

$$\begin{aligned} &-\sum_{\alpha'}\sum_{n} |ni(N)\rangle_n \langle \tilde{\gamma}_\ell | \langle ni(N)| \mathcal{V} |\tilde{\alpha}'\rangle_n \sqrt{N}\, a_{\alpha'} \quad , \\ &-\sum_{\gamma'}\sum_{n} |ni(N)\rangle_n \langle \tilde{\gamma}_\ell | \langle ni(N)| \mathcal{V}_{cl} | \tilde{\gamma}'_\ell , \varphi_{\gamma'}\rangle \quad , \end{aligned} \tag{II-44}$$

où la somme sur n porte sur <u>tous</u> les états liés $|ni\rangle$ de même nombre quantique i que l'état individuel de diffusion $|\varphi_\gamma\rangle$ ($\gamma \equiv \gamma_\ell, i$), ces états liés $|ni\rangle$ étant ou non introduits pour décrire l'état $|\tilde{\gamma}_\ell\rangle_n$ du noyau résiduel.

Les termes correctifs précédents correspondent à l'antisymétrisation entre le nucléon incident et les nucléons du noyau cible.

Ils assurent l'orthogonalité, pour i donné, entre $|\varphi_\gamma\rangle$ et les états liés $|ni\rangle$. En effet, multiplions l'équation (II-35) par le bra $\langle ni|$ appartenant au dual de l'espace à une particule isolée $\mathcal{E}^{(1)}_{(N)}$. Grâce à l'orthogonalité (II-5) des états liés, les deux termes entre crochets de (II-35) s'annulent séparément, il reste ainsi :

$$\langle ni | E_{\gamma_\ell} + h - E | \varphi_\gamma \rangle = 0 \quad , \tag{II-45}$$

qui, $|ni\rangle$ étant par définition état propre de h conduit au résultat annoncé :

$$\langle ni | \varphi_\gamma \rangle = 0 \quad , \quad \gamma \equiv \gamma_\ell, i \quad . \tag{II-46}$$

Contrairement aux relations d'orthogonalité (II-5) entre les états liés et du continu d'un même hamiltonien h, le résultat précédent est non trivial, l'état de diffusion $|\varphi_\gamma\rangle$ étant gouverné par le hamiltonien complet.

II.4.2. Elimination dans un espace modèle des états $|ni\rangle$ inoccupés dans le noyau résiduel.

Pour une voie de réaction $\gamma \equiv \gamma_\ell, i$, on distingue les états liés $|ni\rangle$ selon qu'ils figurent ou non dans les états de particulés indépendantes $|\tilde{\beta}_\ell\rangle_n$ dont $|\tilde{\gamma}_\ell\rangle_n$ est une combinaison linéaire (II-20).

Nous désignerons par $|\mu i\rangle$ les états $|ni\rangle$ présents dans ce développement et par $|\nu i\rangle$ les autres. Les états $|\nu i\rangle$ seront dits inoccupés dans $|\tilde{\gamma}_\ell\rangle_n$, et $|\mu i\rangle$ occupés ou partiellement occupés selon que $|\tilde{\gamma}_\ell\rangle_n$ se réduit ou non à un état de particules indépendantes.

Par exemple, dans la diffusion d'un neutron sur O^{16} ou F^{19}, pour la voie de réaction définie par le fondamental du noyau cible et l'état s de diffusion, les seuls états s liés dans le champ moyen h de ces noyaux sont : 1s et 2s (Tab. 6 et 8).

Dans un modèle où le fondamental de O^{16} est décrit par un état de particules indépendantes formé des couches complètes en protons et neutrons, 1s, 1p3/2, 1p1/2, l'état 1s est occupé et l'état 2s ne l'est pas.

Par contre, en décrivant le fondamental de F^{19} comme le coeur précédent de O^{16} et un mélange de configurations pour un proton et deux neutrons dans la couche 2s-1d, l'état 1s est occupé alors que l'état 2s ne l'est que partiellement (2s n'est présent que dans certaines configurations du tableau 11).

Montrons que dans un espace modèle, on peut éliminer les termes correctifs (II-44) d'antisymétrisation avec les états liés $|\nu i\rangle$ inoccupés dans les états $|\tilde{\gamma}_\ell\rangle_n$ du noyau résiduel.

Pour cela, l'espace de configurations restreint est défini de la façon suivante :

- on suppose qu'il existe un sous-ensemble d'états $|\nu i\rangle$ inoccupés dans <u>toutes</u> les configurations $|\tilde{\gamma}_\ell\rangle_n$ considérées pour le noyau résiduel,
- seuls seront introduits les états à N nucléons liés obtenus par antisymétrisation et normalisation (et éventuellement couplage) des états précédents $|\tilde{\gamma}_\ell\rangle_n$ et $|\nu i\rangle$, soit :

$$|\gamma\widetilde{\nu}\rangle_n = |\gamma_\ell, \widetilde{\nu i}\rangle_n \quad . \tag{II-47}$$

La normalisation de ces états se réduit au facteur de comptage (D-30) :

$$|\gamma\widetilde{\nu}\rangle_n = \frac{1}{\sqrt{N}}\, \mathcal{A}(N-1,1)\, |\gamma_\ell(\widetilde{1,\cdots,N-1})\rangle_n\, |\nu i(N)\rangle \,, \tag{II-48}$$

ceci reste vrai pour un état couplé, l'antisymétrisation n'introduisant pas de règles de sélection sur les couplages (D.1.2b). En fonction des états orthogonaux $|\widetilde{\gamma\nu}\rangle_n$, les équations (II-30a) s'écrivent :

$$[{}_n\langle\widetilde{\gamma\nu}|H_o|\widetilde{\gamma\nu}\rangle_n - E]\, a_{\gamma\nu} + \sum_{\gamma'\nu'} {}_n\langle\widetilde{\gamma\nu}|v|\widetilde{\gamma'\nu'}\rangle_n\, a_{\gamma'\nu'} + \sum_{\gamma'} {}_n\langle\widetilde{\gamma\nu}|v|\widetilde{\gamma'_\ell\,\varphi_{\gamma'}}\rangle_n = 0. \tag{II-49}$$

Les états individuels $|\widetilde{\gamma_\ell}\rangle_n$ et $|\widetilde{\gamma'_\ell}\rangle_n$ étant par hypothèse orthogonaux aux états liés $|\nu i\rangle$ et $|\nu' i'\rangle$, la décomposition (II-16) de v en $v_\ell + v_d$ s'applique :

$${}_n\langle\widetilde{\gamma\nu}|v|\widetilde{\gamma'\nu'}\rangle_n = \delta_{\nu\nu'}\,\delta_{ii'}\,{}_n\langle\widetilde{\gamma_\ell}|v_\ell|\widetilde{\gamma'_\ell}\rangle_n + {}_n\langle\widetilde{\gamma\nu}|v_d|\widetilde{\gamma'\nu'}\rangle_n \,. \tag{II-50}$$

Pour la même raison, on a :

$${}_n\langle\widetilde{\gamma\nu}|H_o|\widetilde{\gamma\nu}\rangle_n = {}_n\langle\widetilde{\gamma_\ell}|H_o|\widetilde{\gamma_\ell}\rangle_n + \varepsilon_{\nu i} \quad . \tag{II-51}$$

En regroupant les termes ci-dessus en H_o et v_ℓ, on fait apparaître dans (II-49) les éléments de matrice de H sur sa base propre $(|\widetilde{\gamma_\ell}\rangle_n)$ (II-20) dans le sous-espace des états liés à N-1 nucléons . Nous en déduisons pour (II-49) une forme analogue à (II-30b) :

$$(E_{\gamma_\ell} + \varepsilon_{\nu i} - E)\, a_{\gamma\nu} + \sum_{\gamma'\nu'} {}_n\langle\widetilde{\gamma\nu}|v_d|\widetilde{\gamma'\nu'}\rangle_n\, a_{\gamma'\nu'} + \sum_{\gamma'} {}_n\langle\widetilde{\gamma\nu}|v_d|\widetilde{\gamma'_\ell\,\varphi_{\gamma'}}\rangle_n = 0 \,, \tag{II-52}$$

où dans le dernier élément de matrice on a remplacé v par v_d, la contribution de v_ℓ étant nulle en raison de l'orthogonalité de $|\nu i\rangle$ avec l'état de diffusion $|\varphi_\gamma\rangle$.

Dans chaque voie de réaction γ , définissons de façon analogue à (II-28), l'état lié $|\chi_\gamma\rangle$ par :

$$|\chi_\gamma\rangle = \sum_\nu a_{\gamma\nu} |\nu i\rangle \quad , \tag{II-53}$$

ainsi que le nouvel état individuel de diffusion :

$$|\psi_\gamma\rangle = |\chi_\gamma\rangle + |\varphi_\gamma\rangle \quad . \tag{II-54}$$

Avec ces notations, les équations (II-52) s'écrivent :

$$(E_{\gamma_\ell} + \varepsilon_{\nu i} - E) a_{\gamma\nu} + \sum_{\gamma'} \langle \tilde{\gamma}_\ell | \langle \nu i(N) | v_d \mathcal{A}(N-1,1) | \tilde{\gamma}'_\ell \rangle_n | \psi_{\gamma'} \rangle = 0 \quad , \tag{II-55}$$

où comme en (II-32) on a isolé l'espace $\mathcal{E}^{(1)}_{(N)}$ en n'antisymétrisant totalement que le ket des éléments de matrice.

Après multiplication par $|\nu i(N)\rangle$, additionnons les équations (II-55) correspondant à une même voie de réaction γ et aux différentes valeurs de ν , il vient :

$$(E_{\gamma_\ell} + h - E) |\chi_\gamma(N)\rangle + \sum_{\gamma'} \sum_\nu |\nu i(N)\rangle \langle \tilde{\gamma}_\ell | \langle \nu i(N) | v_d \mathcal{A}(N-1,1) | \tilde{\gamma}'_\ell \rangle_n | \psi_{\gamma'} \rangle = 0 \tag{II-56}$$

Dans l'espace de configurations restreint considéré ci-dessus, les équations (II-35) prennent, en fonction de $|\psi_\gamma\rangle$, une forme condensée analogue à (II-56) :

$$(E_{\gamma_\ell} + h - E) |\varphi_\gamma(N)\rangle + \sum_{\gamma'} \Big[\langle \tilde{\gamma}_\ell | \mathbb{1}_i(N) v_d \mathcal{A}(N-1,1) | \tilde{\gamma}'_\ell \rangle_n | \psi_{\gamma'} \rangle - \sum_n |ni(N)\rangle \langle \tilde{\gamma}_\ell | \langle ni(N) | v_d \mathcal{A}(N-1,1) | \tilde{\gamma}'_\ell \rangle_n | \psi_{\gamma'} \rangle = 0 \Big] . \tag{II-57}$$

En additionnant les équations (II-56) et (II-57) correspondant aux mêmes voies de réaction γ, on obtient un ensemble d'équations couplées qui dépendent uniquement des états individuels de diffusion $|\psi_\gamma\rangle$ et des configurations $|\tilde{\gamma}_\ell\rangle_n$ du noyau résiduel :

$$(E_{\gamma_\ell} + h - E) |\psi_\gamma(N)\rangle + \sum_{\gamma'} \Big[\langle \tilde{\gamma}_\ell | \mathbb{1}_i(N) v_d \mathcal{A}(N-1,1) | \tilde{\gamma}'_\ell \rangle_n | \psi_{\gamma'} \rangle - \sum_\mu |\mu i(N)\rangle \langle \tilde{\gamma}_\ell | \langle \mu i(N) | v_d \mathcal{A}(N-1,1) | \tilde{\gamma}'_\ell \rangle_n | \psi_{\gamma'} \rangle \Big] = 0 . \tag{II-58}$$

Nous avons utilisé la décomposition du projecteur sur les états liés de nombre quantique i :

$$\sum_n |ni\rangle\langle ni| = \sum_\mu |\mu i\rangle\langle \mu i| + \sum_\nu |\nu i\rangle\langle \nu i| \quad . \tag{II-59}$$

Ainsi, n'apparaissent que les termes d'antisymétrisation correspondant aux états liés $|\mu i\rangle$ effectivement présents dans la description des configurations $|\Psi_\ell\rangle_n$ du noyau résiduel.

La résolution des équations précédentes détermine les états individuels de diffusion $|\psi_\gamma\rangle$. Les comportements asymptotiques aux grandes distances des fonctions d'onde associées à $|\psi_\gamma\rangle$ et $|\varphi_\gamma\rangle$ sont identiques, et par suite conduisent aux mêmes déphasages et sections efficaces.

Les composantes $a_{\gamma\nu}$ des états liés à N nucléons $|\tilde{\gamma\nu}\rangle_n$ s'obtiennent par projection sur les états $|\nu i\rangle$

$$a_{\gamma\nu} = \langle \nu i | \psi_\gamma \rangle \quad . \tag{II-60}$$

Par contre, les termes correctifs d'antisymétrisation assurent encore l'orthogonalité entre les états individuels de diffusion $|\psi_\gamma\rangle$ et les états liés $|\mu i\rangle$ introduits dans la description du noyau résiduel :

$$\langle \mu i | \psi_\gamma \rangle = 0 \quad , \quad \gamma \equiv \gamma_\ell, i \quad . \tag{II-61}$$

Ainsi, dans ce modèle, les équations (a) correspondant aux projections de l'équation de Schrödinger sur les états $|\gamma\nu\rangle$ à N nucléons liés ont-elles pu être éliminées. Il ne subsiste qu'un ensemble d'équations (II-58) du type (b), sans terme de couplage avec des états $|\tilde{\gamma\nu}\rangle_n$, et dont les termes correctifs d'antisymétrisation ne portent que sur les états à une particule liés présents dans le noyau résiduel.

Rappelons, avec des notations évidentes, les espaces de configurations restreints considérés dans ce modèle :

- décomposition de l'espace à une particule :

$$\mathcal{E}^{(1)} = (|\mu i\rangle) + (|\nu i\rangle) + (|\varepsilon i\rangle) \quad ,$$

- espace des états liés à N-1 nucléons de l'étape de prédiagonalisation (II.3.1) :

$$\mathcal{E}^{(N-1)}_{\text{liés}} = (|\mu i\rangle^{\otimes N-1}) \quad ,$$

- espace des états à N nucléons :

$$\mathcal{E}^{(N)} = \mathcal{E}^{(N-1)}_{\text{liés}} \otimes (|\nu i\rangle) + \mathcal{E}^{(N-1)}_{\text{liés}} \otimes (|\varepsilon i\rangle) \quad .$$

Ce cas modèle montre le lien étroit qui existe entre le choix des espaces de configurations et le traitement de l'antisymétrisation entre le nucléon dans le continu et les nucléons liés.

La diffusion de neutrons thermiques sur les noyaux C^{12}, C^{13}, O^{16}, O^{17} et Ca^{40} sera étudiée au chapitre IV dans le cadre du modèle simple présenté ci-dessus.

Par contre, dans le cas de la diffusion de neutrons sur le F^{19}, l'état 2s étant partiellement occupé dans ce noyau, l'étude de l'antisymétrisation entre les états s nous amènera à discuter au chapitre V différentes approximations pour l'espace à vingt nucléons liés correspondant aux états du F^{20}.

II.4.3. Importance des termes correctifs d'antisymétrisation.

a) Les équations utilisées couramment s'obtiennent en négligeant dans (II-42) les termes correctifs d'antisymétrisation.

Cette approximation laisse la possibilité à la particule incidente de se diffuser dans les états à une particule présents dans le noyau résiduel. L'état de diffusion $|\varphi_\gamma\rangle$ possède alors des composantes non nulles sur les états liés $|ni\rangle$ de même nombre quantique i. Evaluons dans un modèle simple, l'effet des corrections d'antisymétrisation sur la longueur de diffusion :

Les fonctions radiales multipliées par r seront désignées par g. Supposons que les potentiels V^L et V^{NL} (E-44) se réduisent à un potentiel local V(r) (cf. ci-dessous, cas d'une interaction à deux corps de portée nulle), et soit $v(r)$ le potentiel à un corps. Dans le cas d'une seule voie de réaction, la forme de l'équation (II-42b) incluant un seul terme correctif d'antisymétrisation avec l'état lié de fonction d'onde radiale g_1, est la suivante, quand on néglige le couplage avec les équations (II-42a) (avec g et g_1 réelles) :

$$g''(r) + v(r)\, g(r) + V(r)\, g(r) - g_1(r) \int_0^\infty g_1(r')\, V(r')\, g(r')\, dr' = 0 \,. \qquad \text{(II-62)}$$

On s'intéresse à la solution nulle à l'origine et dont le comportement asymptotique aux grandes valeurs de r est :

$$g(r) \underset{r \to \infty}{\simeq} 1 - \frac{r}{b} \,. \qquad \text{(II-63)}$$

La fonction d'onde radiale de diffusion approchée g_o, obtenue en négligeant le terme correctif d'antisymétrisation satisfait :

$$g_o''(r) + v(r)\, g_o(r) + V(r)\, g_o(r) = 0 \,, \qquad \text{(II-64)}$$

et les conditions aux limites

$$g_o(0) = 0 \,, \qquad g_o(r) \underset{r \to \infty}{\simeq} 1 - \frac{r}{b_o} \,. \qquad \text{(II-65)}$$

Multipliant la première équation (II-62) par g_o et la seconde (II-64) par g, et retranchant ces deux équations, on fait apparaître la dérivée du Wronskien de g_o et g. Après intégration sur r de zéro à l'infini, on obtient :

$$|W(g_o, g)|_o^\infty = \frac{1}{b_o} - \frac{1}{b} = \int_o^\infty g_o(r)\, g_1(r)\, dr \times \int_o^\infty g_1(r')\, V(r')\, g(r')\, dr' . \quad \text{(II-66)}$$

La fonction radiale g_1 de l'état lié satisfait l'équation :

$$g_1''(r) + V(r)\, g_1(r) + \varepsilon_1 g_1(r) = 0 \;, \quad \varepsilon_1 < 0 \quad . \quad \text{(II-67)}$$

La technique précédente, appliquée aux équations (II-64) et (II-67) permet d'écrire l'intégrale de recouvrement de g_o avec g_1 sous la forme :

$$\int_o^\infty g_o(r)\, g_1(r)\, dr = \frac{1}{\varepsilon_1} \int_o^\infty g_1(r)\, V(r)\, g_o(r)\, dr \quad . \quad \text{(II-68)}$$

D'où la nouvelle expression pour (II-66) de structure analogue à un développement perturbatif :

$$\frac{1}{b_o} - \frac{1}{b} = \frac{1}{\varepsilon_1} \int_o^\infty g_1(r)\, V(r)\, g_o(r)\, dr \times \int_o^\infty g_1(r')\, V(r')\, g(r')\, dr' . \quad \text{(II-69)}$$

Remarque : en supposant g_1, g_o et g peu différentes dans la région interne où le potentiel à courte portée V(r) contribue de façon importante aux intégrales de (II-69), on obtient :

$$\frac{1}{b_o} < \frac{1}{b} \quad , \text{ soit } \quad b < b_o \quad , \quad \text{(II-70)}$$

quand b et b_o sont de même signe.

Pour un état de diffusion à énergie positive ε , un calcul analogue au précédent conduit au résultat suivant :

$$\sin(\delta_o - \delta) = \frac{1}{k(\varepsilon_1 - \varepsilon)} \int_o^\infty g_1(r)\, V(r)\, g_o(r)\, dr \int_o^\infty g_1(r')\, V(r')\, g(r')\, dr' . \quad \text{(II-71)}$$

Les corrections d'antisymétrisation apparaissent ainsi comme des effets du second ordre dans le potentiel V, et sont d'autant plus importantes que la différence des énergies $\varepsilon_1 - \varepsilon$ est faible en valeur absolue.

Cependant, même si $|\varepsilon_1 - \varepsilon|$ est grand, la section efficace de réaction photonucléaire $(\sigma(\gamma,n),\ \sigma(\gamma,p))$, peut être sensible à de petites composantes sur les états liés. Cela a été montré pour O^{16} [13], où l'amplitude photonucléaire pour l'état occupé 1s est beaucoup plus importante que celle correspondant

aux états 2s et s dans le continu (les fonctions d'onde radiales de ces deux derniers états ayant un noeud à distance finie non nulle, alors que celle de l'état 1s n'en a pas).

Dans les problèmes de diffusion nucléon-noyau à énergie d'excitation nulle ou très faible, que nous considérerons aux chapitres IV et V, les corrections d'antisymétrisation avec les états s liés seront importantes, en particulier pour l'état 2s de faible énergie de liaison (Tab. 4,5,6,7 et 8). Nous comparerons les résultats obtenus en négligeant ces corrections, puis en introduisant celle correspondant à l'état 1s et enfin simultanément celles correspondant aux états 1s et 2s.

b) Pour une interaction $\mathcal{V}$ à deux corps de portée nulle :

$$\mathcal{V}_{12} = V_0 \, \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad , \tag{II-72}$$

le potentiel non local $V^{NL}_{\gamma\gamma'}(r,r')$ est proportionnel à $\delta(r-r')$. En effet, la partie radiale $V_\ell(r,r')$ du développement multipolaire de cette interaction est $\frac{1}{4\pi} \frac{\delta(r-r')}{r^2}$ (E-19), par suite "l'intégrale" radiale (E-40) du terme d'échange de l'élément de matrice (E-35) s'écrit :

$$\mathcal{R}^{\ell}_{a,ri,r'i',c} = \frac{1}{4\pi} f_a(r) f_c(r) \frac{\delta(r-r')}{r^2} \quad . \tag{II-73}$$

Négligeant les termes correctifs d'antisymétrisation, les équations (II-42b) se réduisent alors à des équations différentielles avec un potentiel local.

Cependant, même avec une telle interaction, les termes correctifs d'antisymétrisation, lorsqu'ils sont présents, maintiennent le caractère intégro-différentiel des équations.

II.5. AVANTAGES DE LA DESCRIPTION CONSIDEREE POUR LES ETATS A N NUCLEONS.

L'espace de configurations restreint considéré des états $|\tilde{\alpha}\rangle_n$ et $|\tilde{\gamma\varepsilon}\rangle_n$, peut également être engendré par le produit tensoriel des états liés $|\tilde{\gamma}_\ell\rangle_n$ de la cible par tous les états à une particule, liés ou non.

Pour décrire ces derniers états individuels, adoptons la base propre de l'opérateur $|\vec{r}|$ et des autres opérateurs dont l'ensemble des valeurs propres est désigné par i (on suppose qu'ils forment un ensemble complet d'observables qui commutent). Cette base satisfait les relations de fermeture et d'orthogonalité (II-36, 37). On considère ainsi pour l'espace à N nucléons, le système

générateur défini par les états :

$$|\widetilde{\Phi}_{\gamma r}\rangle_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \mathcal{A}(N-1,1)|\gamma_\ell(\widetilde{1,\cdots,N-1})\rangle_n |ri(N)\rangle , \qquad \text{(II-74)}$$

où l'indice γ de voie de réaction, désigne à la fois γ_ℓ et i ainsi qu'éventuellement les couplages en spin et isospin. L'état général $|\widetilde{\Psi}\rangle$ (II-8) s'exprime alors comme une intégrale sur r et une somme sur l'indice discret γ :

$$|\widetilde{\Psi}\rangle = \sum_\gamma \int r^2 dr \; \psi_\gamma(r) \, |\widetilde{\Phi}_{\gamma r}\rangle_n , \qquad \text{(II-75)}$$

où $\psi_\gamma(r)$ est la fonction d'onde radiale d'un état individuel $|\psi_\gamma\rangle$:

$$|\psi_\gamma\rangle = \int_0^\infty r^2 dr \; \psi_\gamma(r) \, |ri\rangle . \qquad \text{(II-76)}$$

Cet état $|\psi_\gamma\rangle$ présente des composantes à la fois sur les états liés et les états du continu :

$$|\psi_\gamma\rangle = \sum_n a_n^\gamma \, |ni\rangle + \int d\varepsilon \; a^\gamma(\varepsilon) \, |\varepsilon i\rangle . \qquad \text{(II-77)}$$

Remarquons que le développement (II-75) est identique à celui que l'on utiliserait dans le formalisme du groupe résonnant ou de la coordonnée génératrice [14], appliqué au cas élémentaire de la diffusion d'un nucléon par un noyau, la distance r entre le centre de masse du noyau résiduel et le nucléon incident étant la coordonnée génératrice, l'indice γ de voie de réaction pouvant être considéré comme une coordonnée génératrice discrète.

Les amplitudes $\psi_\gamma(r)$ s'obtiennent en résolvant l'équation de Schrödinger $H\,|\widetilde{\Psi}\rangle = E\,|\widetilde{\Psi}\rangle$, projetée sur les états $|\widetilde{\Phi}_{\gamma r}\rangle_n$, soit :

$$\sum_{\gamma'} \int_0^\infty r'^2 dr' \; {}_n\langle \widetilde{\Phi}_{\gamma r} | H - E | \widetilde{\Phi}_{\gamma' r'}\rangle_n \; \psi_{\gamma'}(r') = 0 . \qquad \text{(II-78)}$$

Les difficultés de résolution dans cette représentation résident dans l'évaluation du noyau de cette équation intégrale. En particulier, les états générateurs $|\widetilde{\Phi}_{\gamma r}\rangle_n$ ne sont pas orthogonaux et par suite il s'introduit une matrice de norme :

$$N_{\gamma\gamma'}(r,r') = {}_n\langle \widetilde{\Phi}_{\gamma r} | \widetilde{\Phi}_{\gamma' r'}\rangle_n . \qquad \text{(II-79)}$$

Donnons seulement les grandes lignes de ce calcul :

On n'antisymétrise totalement (D-25) que le ket de l'élément de matrice :

$$\ll \widetilde{\Phi}_{\gamma r} \,|H-E|\, \widetilde{\Phi}_{\gamma' r'} \gg_n = \ll \gamma_\ell(\widetilde{1,\cdots,N-1})|\langle r\, i(N)|(H-E)\,\mathcal{A}(N-1,1)|\gamma'_{\ell'}(\widetilde{1,\cdots,N-1})\rangle_n |r' i'(N)\rangle , \tag{II-80}$$

puis, les contributions dues à la substitution identité de $\mathcal{A}(N-1,1)$, se séparent des autres, suivant le schéma :

$\mathcal{A}(N-1,1) =$	$\mathbb{1}$	$-\sum_{\mathcal{P}} \mathcal{P}$
Noyau de recouvrement :		
	$N_{\gamma\gamma'}(r,r') = \delta_{\gamma_\ell \gamma'_{\ell'}} \dfrac{\delta(r-r')}{r^2}\ \delta_{ii'}$	$- M_{\gamma\gamma'}(r,r')$
Noyau d'énergie $H = T + V$:		
T + V sur les espaces 1,..,N-1 :	$\delta_{\gamma\gamma'} \dfrac{\delta(r-r')}{r^2}\ E_{\gamma_\ell}$	T : $\dfrac{\hbar^2}{2\mu}\left[\dfrac{\delta''(r-r')}{r^2}\right.$
T sur l'espace N :	$-\dfrac{\hbar^2}{2\mu}\left[\dfrac{\delta''(r-r')}{r^2} + \dfrac{2\,\delta'(r-r')}{r^3} + \dfrac{\ell_i(\ell_i+1)}{r^2}\right]\delta_{\gamma\gamma'}$	$\left. + \dfrac{2\delta'(r-r')}{r^3} + \dfrac{\ell_i(\ell_i+1)}{r^2}\right] M_{\gamma\gamma'}(r,r')$
V incluant l'espace N :	$\dfrac{\delta(r-r')}{r^2}\ V^{L}_{\gamma\gamma'}(r)$	V : $V^{NL}_{\gamma\gamma'}(r,r')$.

Les équations (II-78) s'écrivent alors sous la forme d'un ensemble d'équations intégro-différentielles :

$$\left[E_{\gamma_\ell} - \frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\,r + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right) - E\right]\psi_\gamma(r)$$
$$+ \sum_{\gamma'} V^{L}_{\gamma\gamma'}(r)\,\psi_{\gamma'}(r) + \int_0^\infty r'^2 dr'\, V^{NL}_{\gamma\gamma'}(r,r')\,\psi_{\gamma'}(r')$$
$$- \sum_{\gamma'}\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\,r + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right) - E\right]\int_0^\infty r'^2 dr'\, M_{\gamma\gamma'}(r,r')\,\psi_{\gamma'}(r') = 0. \tag{II-81}$$

Le dernier terme est un pseudo-potentiel dépendant de l'énergie, qui assure, par l'intermédiaire du recouvrement $M_{\gamma\gamma'}(r,r')$, l'antisymétrisation avec les états liés à une particule de même nombre quantique i que l'état individuel $|\psi_\gamma\rangle$.

Cette description des états à N nucléons, différente de celle adoptée en (II.1.2), conduit à une formulation qui présente essentiellement deux inconvénients :

1- On doit résoudre l'équation de Schrödinger sur une base non orthogonale. Les termes correctifs d'antisymétrisation apparaissent alors globalement sous la forme d'une matrice de norme $N_{\gamma\gamma'}(r,r')$, et non séparément, comme en (II-44), pour chaque état lié à une particule de même nombre quantique i que l'état individuel de diffusion.

2- N'ayant pas séparé dans l'état individuel de diffusion $|\psi_\gamma\rangle$ (II-76) les composantes liées de celles dans le continu, l'étude du couplage entre les configurations à N-1 nucléons liés et un dans le continu avec les états liés à N nucléons, est malaisée.

La formulation (II.3), que nous avons adoptée, est par contre bien adaptée à l'étude de l'approximation qui consiste pour certaines voies de réaction fermées, à négliger les composantes dans le continu en se limitant à celles à N nucléons liés. On approche ainsi ces voies de réaction par des états quasi-liés correspondant à des états excités du noyau cible plus la particule incidente liée.

Montrons qu'avec ces approximations, la formulation précédente conduit à des équations du même type que les équations (II-42) que nous avons utilisées. Pour cela, considérons un exemple simple d'équations (II-81) avec deux voies de réaction couplées correspondant aux fonctions d'onde radiales de diffusion y et z satisfaisant des équations du type :

$$\begin{cases} (E_y + h - E)\, y + V y + W z = 0 & \text{(II-82)} \\ (E_z + h - E)\, z + V z + W y = 0 \,, & \text{(II-83)} \end{cases}$$

où h est le hamiltonien à un corps, V et W sont des potentiels (éventuellement non locaux), calculés à partir des forces à deux corps. Les énergies E_y et E_z sont celles des états γ_y et γ_z de la cible, définissant les voies considérées.

Négligeant la composante dans le continu de z, nous approchons cette voie de réaction par un état quasi-lié :

$$z \simeq a f \,, \qquad \text{(II-84)}$$

où a est un coefficient à déterminer, et f une fonction d'onde radiale d'état lié, telle que la configuration à N nucléons liés $|\widetilde{\gamma_z, f}\rangle_n$ soit état propre du hamiltonien vrai H, d'énergie E_o. Montrons que l'on peut alors remplacer l'équation de diffusion (II-83) par une équation linéaire intégrale en a et y , semblable à (II-42a).Pour cela, multiplions l'équation (II-83) par f et intégrons sur la variable r :

$$\int_o^\infty r^2 dr\, f\,(E_z + h + V - E)\,z \;+\; \int_o^\infty r^2 dr\, f\, W\, y \;=\; 0 \quad . \qquad \text{(II-85)}$$

Le premier terme fait apparaitre l'action de H sur l'état quasi-lié $|\widetilde{\gamma_z, f}\rangle_n$, cette équation s'écrit donc :

$$(E_o - E)\,a + \int_o^\infty r^2 dr\, f\, W\, y \;=\; 0 \quad , \qquad \text{(II-86)}$$

ce qui est bien une équation du type (II-42a).

Notons enfin, un autre inconvénient de la description (II-75) des états à N nucléons,à savoir : les états quasi-liés sont définis par le produit tensoriel antisymétrisé d'états de la cible par un état lié à une particule. Une telle représentation de ces états liés à N nucléons n'est pas nécessairement bien adaptée, en particulier, dans le cas d'un mélange de configurations important comme pour le F^{19} que nous étudierons au chapitre V. En effet, les états excités du F^{20} ne s'identifient pas simplement avec des états de la cible de F^{19} plus un neutron lié.

En conclusion, la formulation présentée au début de ce chapitre, et conduisant aux équations (II-42) est bien adaptée à la description microscopique de la diffusion d'un nucléon par un noyau, en permettant :

1- un traitement aisé de l'antisymétrisation complète de l'ensemble cible plus nucléon incident,

2- une étude du couplage avec certaines voies de réaction fermées, correspondant à des états excités de la cible, pour lesquelles on néglige les composantes dans le continu en les approchant par des états quasi-liés. Ces états correspondent à des résonances interprétées habituellement dans le modèle du noyau composé.

CHAPITRE III

APPLICATION A LA DIFFUSION DE NEUTRONS DE BASSE ENERGIE

III.1. FORMULATION DU PROBLEME.

Le formalisme présenté ci-dessus est appliqué à l'étude de la diffusion de neutrons de faible énergie par les noyaux suivants :

$$C^{12},\ C^{13},\ O^{16},\ O^{17},\ F^{19} \text{ et } Ca^{40}.$$

Seule la diffusion dans l'onde s sera introduite. Il s'agit d'une très bonne approximation pour des neutrons thermiques (Tab. 1), ayant une énergie de l'ordre du centième d'électron-volt.

On notera que la longueur de diffusion et le déphasage dans l'onde s constituent une quantité d'information limitée, qu'il est souvent possible de reproduire en ajustant convenablement les paramètres d'un potentiel à un corps. Mais, contrairement à une telle paramétrisation des résultats expérimentaux, nous voulons tester dans des cas modèles le formalisme du chapitre II et évaluer l'importance des termes correctifs d'antisymétrisation.

On étudiera ainsi les effets de l'antisymétrisation sur la longueur de diffusion et le déphasage en comparant les résultats obtenus :

- sans correction d'antisymétrisation avec les états s occupés dans le noyau cible,
- en introduisant la correction d'antisymétrisation avec l'état 1s,
- puis simultanément celles avec les états 1s et 2s.

Pour les noyaux à "couches complètes", C^{12}, O^{16} et Ca^{40}, ainsi que pour les noyaux voisins C^{13} et O^{17}, l'antisymétrisation sera étudiée au chapitre IV dans le cadre du modèle introduit en (II.4.2).

L'antisymétrisation dans le cas d'un mélange de configurations pour le F^{19}, fera l'objet du chapitre V.

III.1.1. Diffusion à énergie nulle, "pseudo-magnétisme nucléaire".

On étudiera plus particulièrement les effets de l'antisymétrisation sur la longueur de diffusion b définie par :

$$\lim_{k \to 0} \quad k \operatorname{cotg} \delta = - \frac{1}{b} \quad . \tag{III-1}$$

La diffusion de neutrons par un noyau de spin I non nul, a lieu dans les voies de réaction de spin $J = I \pm 1/2$. Seules sont couplées, par le hamiltonien H invariant par rotation, les voies de réaction correspondant à une même valeur de J.

Pour un noyau cible de spin non nul, les deux longueurs de diffusion $b_{\pm}$, correspondant respectivement aux valeurs $I \pm 1/2$ du spin total, peuvent s'écrire :

$$b_{\pm} = A + B \, (\vec{I}.\vec{\delta})_{\pm} \qquad \begin{cases} b_+ = A + B \, \dfrac{I}{2} \\ b_- = A - B \, \dfrac{I+1}{2} \end{cases} , \tag{III-2}$$

définissant ainsi les paramètres A et B :

$$A = \frac{I}{2I+1} \, b_- + \frac{I+1}{2I+1} \, b_+ \quad , \tag{III-3}$$

$$B = \frac{2}{2I+1} \, (b_+ - b_-) \quad . \tag{III-4}$$

l'amplitude A s'identifie (A-37) à la longueur de diffusion cohérente de neutrons, polarisés ou non, sur des noyaux non polarisés ; la section efficace correspondante est :

$$\sigma_{coh.} = 4 \pi A^2 \quad . \tag{III-5}$$

La section efficace totale de diffusion de neutrons sur des noyaux non polarisés s'écrit :

$$\sigma_{tot.} = 4 \pi \left[A^2 + B^2 \frac{I(I+1)}{4} \right] = 4 \pi \left(\frac{I}{2I+1} \, b_-^2 + \frac{I+1}{2I+1} \, b_+^2 \right) . \tag{III-6}$$

Connaissant les sections efficaces $\sigma_{coh.}$ et $\sigma_{tot.}$, on en déduit le carré du module des amplitudes A et B :

$$A^2 = \frac{1}{4\pi} \, \sigma_{coh.} \quad , \quad B^2 = \frac{1}{4\pi} \, \frac{4}{I(I+1)} \, (\sigma_{tot} - \sigma_{coh.}) . \tag{III-7}$$

L'amplitude B n'est déterminée en grandeur et en signe (A.2b) que si les neutrons incidents et les noyaux cibles sont simultanément polarisés.

Les corrections d'antisymétrisation pourront être différentes dans les deux voies de réaction $J = I \pm 1/2$. Ce sera en particulier le cas pour le F^{19} (chapitre V) où la valeur de l'amplitude B, proportionnelle à la différence des longueurs de diffusion b_+ et b_-, sera très sensible aux effets d'antisymétrisation.

La paramétrisation (III-2) des longueurs de diffusion $b_\pm$ suggère l'analogie magnétique suivante, introduite par A. Abragam[1] :

En présence de magnétisme électronique, l'interaction entre le moment magnétique $\vec{\mu}_n$ du neutron et le moment magnétique électronique $\vec{\mu}$ de la cible, donne , à l'approximation de Born, une longueur de diffusion de la forme :

$$b_m = - \frac{2 m_n}{\hbar^2} \vec{\mu} \cdot \vec{\mu}_n \quad , \tag{III-8}$$

où $\vec{\mu}_n$ est perpendiculaire au plan de réaction, m_n désigne la masse du neutron.

Les moments magnétiques sont proportionnels aux spins, soit avec les rapports gyromagnétiques correspondants :

$$\vec{\mu}_n = 2 g_n \mu_{B_n} \vec{s}_n \quad , \quad g_n = - 1.91 \tag{III-9}$$

$$\vec{\mu}_e = g_e \mu_{B_e} \vec{s}_e \quad , \quad g_e = - 2 \quad , \tag{III-10}$$

où μ_{Bn} et μ_{Be} sont respectivement les magnétons de Bohr nucléaire et électronique :

$$\mu_{B_n} = \frac{e\hbar}{2 m_n c} \quad , \quad \mu_{Be} = \frac{e\hbar}{2 m_e c} \tag{III-11}$$

La longueur de diffusion magnétique b_m s'exprime alors en fonction des spins, sous une forme analogue à la dépendance en spin de la longueur de diffusion nucléaire (III-2) :

$$b_m = B_m \vec{s}_e \cdot \vec{s}_n \quad . \tag{III-12}$$

Inversement, associons à la diffusion d'origine nucléaire par un noyau de spin I, un "pseudo-moment magnétique"[1] μ^*, défini par :

$$\frac{\mu^*}{-\mu_{B_e}} = \frac{B_n I}{B_m \frac{1}{2}} \quad . \tag{III-13}$$

Remarque : la diffusion magnétique due aux nucléons de la cible est négligeable, le magnéton de Bohr nucléaire étant 1800 fois (m_n/m_e) plus petit que celui de l'électron.

L'introduction de ce "pseudo-magnétisme nucléaire" a permis, par analogie, d'utiliser des techniques de résonance magnétique, pour mesurer les amplitudes B [7].

III.1.2. Diffusion à énergie non nulle, théorie de la portée effective.

Nous comparerons les résultats obtenus pour le déphasage, avec ceux que donne la théorie de la portée effective [15].

Cette approximation est déduite de la formule exacte de Bethe pour les ondes s :

$$k \operatorname{cotg} \delta = -\frac{1}{b} + \varepsilon \int_0^\infty r^2 dr \left[\varphi_\varepsilon^i(r)\, \varphi_0^i(r) - \varphi_\varepsilon(r)\, \varphi_0(r) \right] , \qquad \text{(III-14)}$$

où, φ_ε et φ_ε^i sont les fonctions d'onde radiales de diffusion à l'énergie $\frac{\hbar^2}{2\mu}\varepsilon$, respectivement régulière et irrégulière à l'origine et ayant le même comportement asymptotique aux grandes distances, φ_0 et φ_0^i sont les fonctions correspondantes à énergie nulle.

Les potentiels nucléaires étant à courte portée, l'espace peut être scindé en une région interne, pour laquelle la valeur absolue du potentiel est très grande devant l'énergie, et une région externe où le potentiel est négligeable. La contribution à l'intégrale (III-14) vient alors essentiellement de la région interne, pour laquelle une bonne approximation consiste à remplaçer φ_ε^i par φ_0^i et φ_ε par φ_0. D'où les premiers termes du développement de k cotg δ en série de l'énergie :

$$k \operatorname{cotg} \delta \simeq -\frac{1}{b} + \varepsilon \int_0^\infty r^2 dr \left[\varphi_0^i(r)^2 - \varphi_0(r)^2 \right] . \qquad \text{(III-15)}$$

La portée effective définie par :

$$r_e = 2 \int_0^\infty r^2 dr \left[\varphi_0^i(r)^2 - \varphi_0(r)^2 \right] , \qquad \text{(III-16)}$$

est une grandeur caractéristique du potentiel, nous la calculerons dans chaque approximation faite sur l'antisymétrisation.

Le déphasage déduit de la théorie de la portée effective à partir des paramètres b et r_e s'écrit :

$$\delta = \text{Arctg} \frac{k}{-\frac{1}{b} + \frac{\varepsilon}{2} r_e} \qquad \text{(III-17)}$$

III.2. CHOIX DU POTENTIEL A UN CORPS.

III.2.1. Détermination phénoménologique des énergies de particules indépendantes.

Pour justifier la troncature de l'espace de configurations (II.1.2), nous avons supposé que les premiers états excités de H_o engendraient un espace auquel appartiennent les premiers états excités du vrai hamiltonien H.

Cet hamiltonien H_o de particules indépendantes devrait être déduit de H de manière self-consistante par une méthode du type Hartree-Fock [16] . Un tel calcul est complexe et conduit en général à un champ moyen déformé. Ces problèmes de résolution des équations de Hartree-Fock avec projection seront évités en adoptant un point de vue phénoménologique :

Conformément au modèle des couches, on fait l'hypothèse que le spectre de basse énergie des noyaux impairs, voisins des noyaux à couches complètes à A nucléons, est un spectre de particules indépendantes. Les énergies s'écrivent alors :

$$E^{i}_{A\pm1} = E^{f}_{A} \pm \varepsilon_i \pm mc^2, \qquad \text{(III-18)}$$

avec $\pm$ suivant que i est un état de particule ou de trou, E_A est l'énergie du fondamental du noyau à couches complètes et m la masse d'un nucléon à l'infini.

Les énergies de particules indépendantes seront alors déterminées en adoptant pour les énergies E des noyaux considérés, les valeurs expérimentales. Les spectres correspondant au C^{12} et à O^{16} sont donnés figures 2 et 3 ; ces énergies particule-trou sont discutées dans la référence [20].

Cette démarche phénoménologique ne détermine pas les énergies des états individuels très liés dans le champ moyen, tels que les états 1s et 1p dans le cas du Ca^{40}.

De plus, pour le F^{19}, dont le noyau correspond à un mélange de configurations important dans la couche 2s-1d, le choix des ε_i n'est pas bien défini. Nous avons cependant adopté les mêmes valeurs que pour O^{16}.

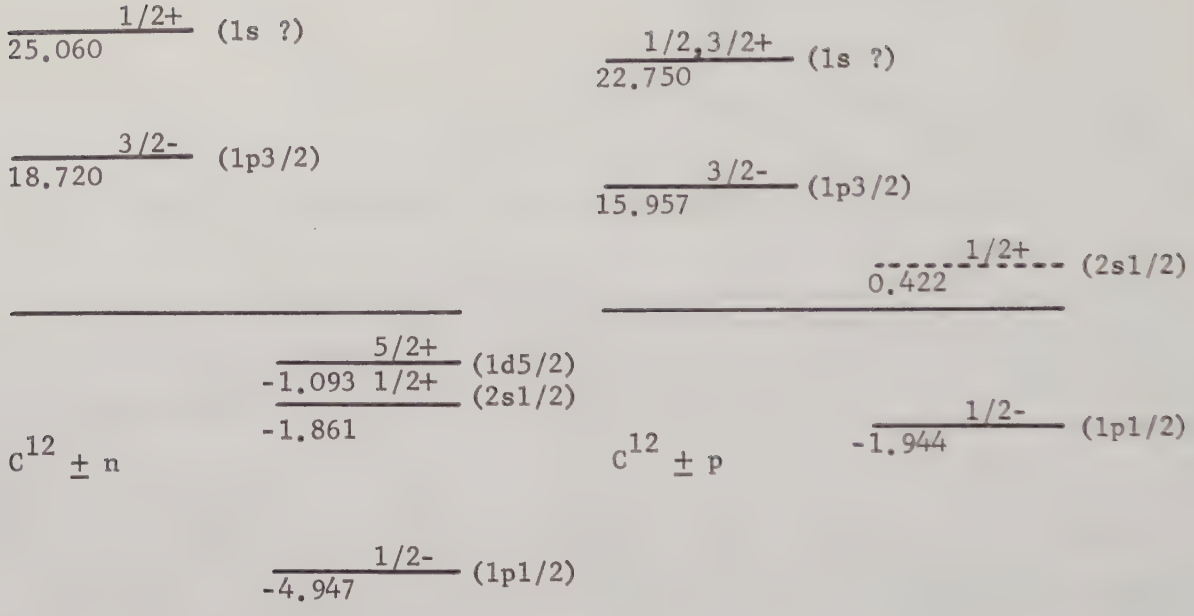


Figure 2 : Energies de particules et de trous pour le C^{12} tirées des spectres expérimentaux des noyaux C^{11}, C^{12}, B^{11} [17] et C^{13}, N^{13} [18].

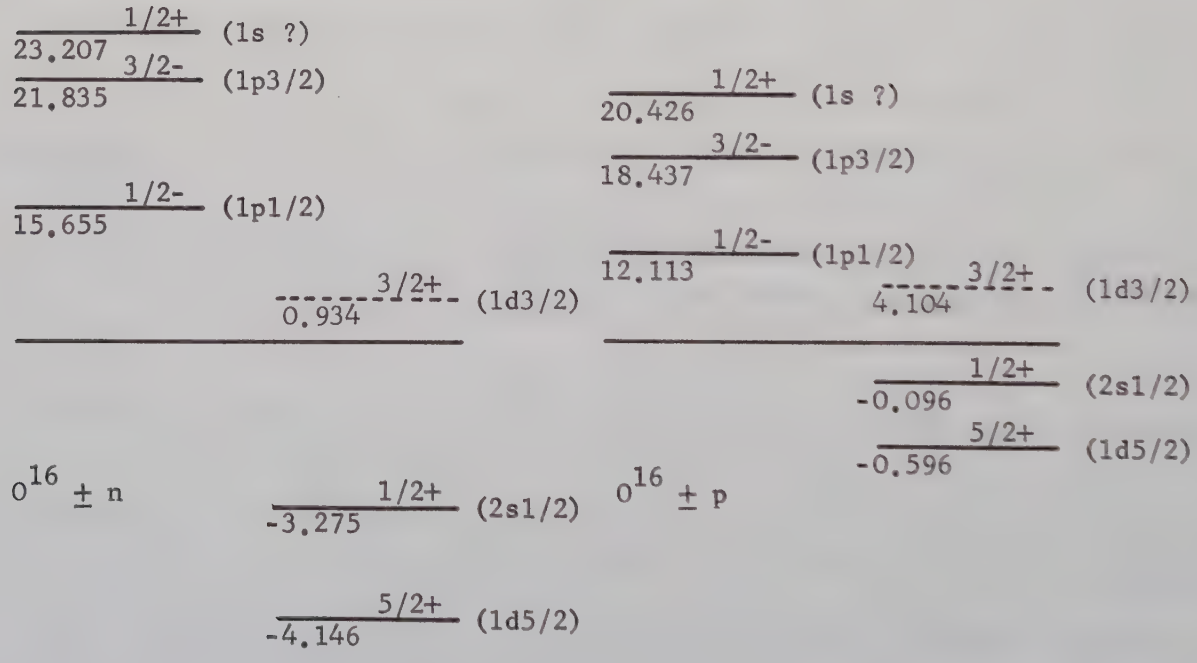


Figure 3 : Energies de particules et de trous pour O^{16} tirées des spectres expérimentaux des noyaux O^{15}, N^{15} [18] et O^{16}, O^{17}, F^{17} [19].

III.2.2. Les potentiels à un corps utilisés.

Les énergies de particules indépendantes ainsi définies, les fonctions d'onde radiales correspondantes seront approchées successivement par celles de deux potentiels particuliers :

a) L'oscillateur harmonique isotrope sans énergie spin-orbite (C.3.2a) :

$$v(r) = \frac{1}{2} \mu \omega^2 r^2 + v_o \quad . \qquad \text{(III-19)}$$

C'est le potentiel adopté habituellement dans les calculs des états liés, ce choix étant dicté par des raisons de commodités numériques.

Le spectre des états à une particule est alors entièrement discret et a priori ce potentiel est mal adapté au problème de diffusion. Néanmoins, nous le conserverons pour définir les fonctions radiales des états liés. L'ensemble des états liés de H_o, qui détermine la troncature (II.1.2) de l'espace de configurations, étant alors défini phénoménologiquement par les valeurs expérimentales des énergies de particules indépendantes. Ainsi, dans le champ moyen de O^{16} (Fig. 3), les états de neutrons 1s, 1p, 2s et 1d5/2 sont liés, tandis que l'état 1d3/2 ne l'est pas.

Comme nous l'avons mentionné en (II.1.2), c'est cette nouvelle définition du mot "lié" qu'il faut utiliser quand on adopte un potentiel non borné.

Ce potentiel d'oscillateur harmonique néglige l'énergie spin-orbite qui est importante dans la région nucléaire considérée (de l'ordre de 5 MeV). Cette approximation d'un puits infini est également mauvaise pour les états de ℓ élevés, les plus sensibles au détail de la surface nucléaire. En fait, même pour ℓ=0 le rayon quadratique moyen est plus faible que dans le cas d'un puits de Wood-Saxon comparable. En effet, la décroissance pour les grandes valeurs de r des fonctions d'onde radiales est en e^{-ar^2} au lieu de e^{-br} pour un puits fini (Fig. 4).

La forme analytique des fonctions d'onde radiales de l'oscillateur harmonique isotrope est donnée par (C-35).

Le paramètre α est déterminé de façon à reproduire, dans un modèle de particules indépendantes, le rayon quadratique de la distribution de charge obtenu par la diffusion d'électrons (Tab. 2).

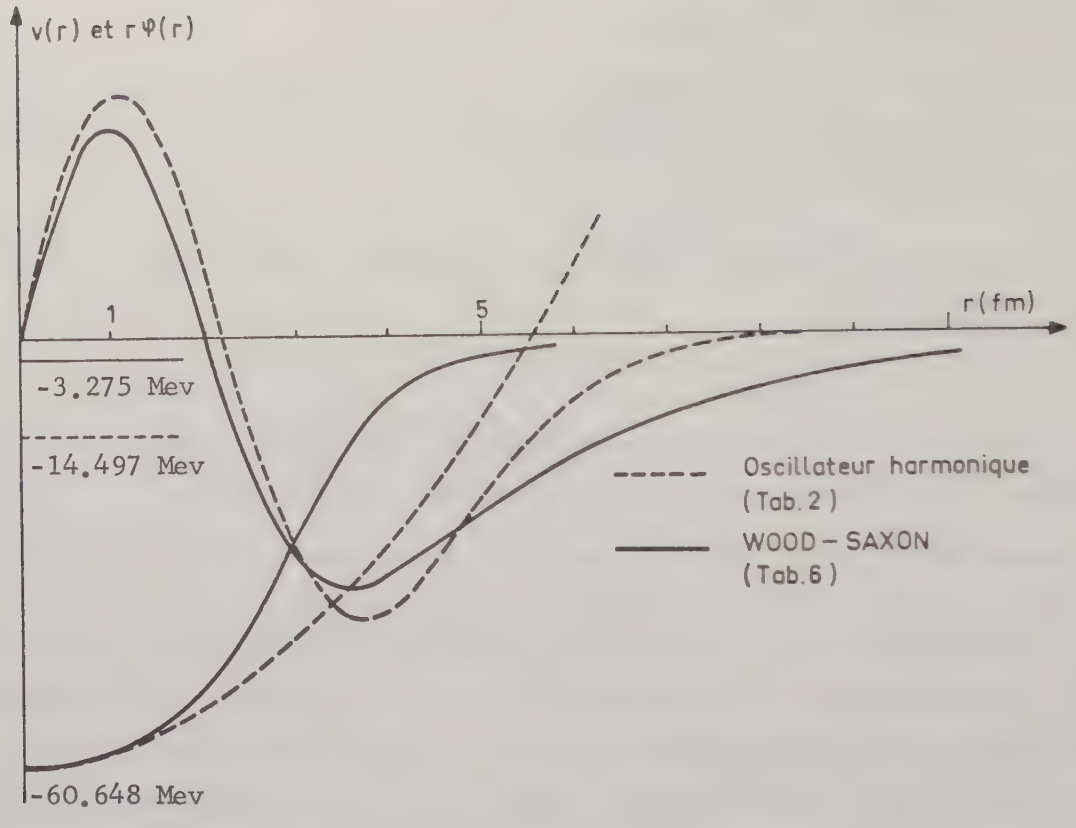


Figure 4 : Comparaison des potentiels d'oscillateur harmonique et de Wood-Saxon, ainsi que des fonctions d'onde radiales multipliées par r et des énergies de liaison des états 2s correspondant à ces potentiels, pour O^{16}.

Dans les cas étudiés, le terme constant v_o (III-19) de ce potentiel à un corps n'intervient pas puisqu'il figure uniquement dans l'intégrale $\int_o^\infty f_n(r)\ v_o \varphi_\gamma(r) r^2\ dr$ (II-42), nulle en raison de l'orthogonalité (II-46) entre les états individuels de diffusion et les états liés de même nombre quantique i.

Noyau	$\langle r^2 \rangle^{1/2}$ (fm)	α(fm^{-1})	$\hbar\omega$ (Mev)
C^{12}	2.46 ± 0.025 [21]	0.594	15.962
O^{16}	2.73 ± 0.025 [21]	0.546	13.186
F^{19}	2.92	0.531	12.342
Ne^{20}	2.98 ± 0.08 [22]	0.526	12.077
Ca^{40}	3.45 ± 0.03 [23]	0.498	10.548

Tableau 2 : Rayons quadratiques de la distribution de charge, obtenus par la diffusion d'électrons. Pour le F^{19} la valeur est le résultat de l'interpolation linéaire entre les rayons de O^{16} et Ne^{20}.

Les constantes α(C-31) de l'oscillateur harmonique, donnent, dans un modèle de particules indépendantes, les valeurs de ces rayons.

b) Potentiel de Wood-Saxon avec un terme spin-orbite (C.3.2b) :

$$v(r) = v_o \frac{1}{1 + e^{(r-R)/a}} + v_{ls} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{1}{1+e^{(r-R)/a}} \vec{l} \cdot \vec{s} \qquad \text{(III-20)}$$

Dans ce cas le spectre des états à une particule présente une partie discrète et une partie continue.

r_o (fm)	a (fm)	v_{ls} (Mev fm^2)
1.15	0.6	24

Tableau 3 : Paramètres utilisés pour le potentiel de Wood-Saxon [13].

Avec les valeurs usuelles [13] des paramètres r_o, a et v_{ls} (Tab. 3), on détermine la profondeur v_o de façon à reproduire les énergies expérimentales de particules indépendantes ε_i. La méthode numérique utilisée pour un tel calcul est indiquée en (F.2.3).

Pour chaque état (n,ℓ,j), on introduit ainsi un potentiel particulier dont les paramètres sont regroupés, pour les différents noyaux, dans les tableaux 4,5,6,7 et 8. L'orthogonalité (II-5) entre ces états propres de potentiels

différents est cependant maintenue, étant assurée par la dépendance angulaire et spinorielle, sauf pour les états s.

L'état 1s, dont l'énergie de liaison expérimentale de particule indépendante est d'ailleurs mal définie, sera déterminé par le potentiel qui reproduit l'énergie de liaison de l'état 2s.

Bien que les énergies expérimentales ε_i soient différentes pour les protons et les neutrons, on adoptera les valeurs correspondant aux neutrons pour déterminer les fonctions d'onde radiales, l'introduction de fonctions différentes pour protons et neutrons étant peu aisée pour un état à N nucléons, propre du spin isotopique.

N = 13		R_{13} = 2.633 fm		R_{qm} = 2.230 fm	
Etat	ε (Mev)	v_o (Mev)	ε_c (Mev)	ε_p (Mev)	r_{qm} (fm)
1s1/2	-36.852	-66.640	15.083	-51.936	1.834
1p3/2	-18.720	-69.578	24.242	-42.962	2.428
2s1/2	- 1.861	-66.640	14.777	-16.638	4.688

Tableau 4 : C^{12} . Les tableaux 4, 5, 6 et 7 donnent pour les noyaux considérés les profondeurs v_o des potentiels de Wood-Saxon (C-39,40), avec les paramètres du tableau 3, qui reproduisent les énergies de liaison expérimentales ε de particules indépendantes sauf pour l'état 1s. Ce dernier est défini comme l'état 1s du potentiel de Wood-Saxon qui reproduit l'énergie de liaison expérimentale de l'état 2s.

Les énergies cinétique et potentielle de ces états sont respectivement ε_c et ε_p , leur rayon quadratique moyen est r_{qm}.

La masse réduite $\mu = (N-1/N)\ m$ (C-22) utilisée dans ces calculs, est définie par N. Le rayon du potentiel de Wood-Saxon est $R_N = r_o\ (N-1)^{1/3}$.

Le rayon quadratique moyen du noyau de particules indépendantes construit avec ces états, est R_{qm}.

Les calculs sont effectués avec n = 100 points de discrétisation et un pas de h = 0.2 fm.

N = 14		R_{14} = 2.704 fm		R_{qm} = 2.328 fm	
Etat	ε (Mev)	v_o (Mev)	ε_c (Mev)	ε_p (Mev)	r_{qm} (fm)
1s1/2	-35.650	-63.673	14.411	-50.061	1.870
1p3/2	-18.720	-67.078	23.487	-42.207	2.457
1p1/2	- 4.947	-43.069	15.611	-20.558	3.120
2s1/2	- 1.861	-63.673	14.569	-16.430	4.707

Tableau 5 : C^{13} . Potentiels de Wood-Saxon, voir légende du tableau 4.

N = 17		R_{17} = 2.898 fm		R_{qm} = 2.374 fm	
Etat	ε (Mev)	v_o (Mev)	ε_c (Mev)	ε_p (Mev)	r_{qm} (fm)
1s1/2	-36.340	-61.132	13.322	-49.661	1.931
1p3/2	-21.835	-65.830	22.704	-44.539	2.474
1p1/2	-15.655	-56.705	20.455	-36.110	2.616
2s1/2	- 3.275	-61.132	17.659	-20.934	4.130

Tableau 6 : O^{16} . Potentiels de Wood-Saxon, voir légende du tableau 4.

N = 18		R_{18} = 2.957 fm		R_{qm} = 2.454 fm	
Etat	ε (Mev)	v_o (Mev)	ε_c (Mev)	ε_p (Mev)	r_{qm} (fm)
1s1/2	-35.452	-59.126	12.862	-48.314	1.962
1p3/2	-21.835	-64.185	22.143	-43.978	2.500
1p1/2	-15.655	-55.170	19.961	-35.616	2.642
1d5/2	- 4.146	-63.498	26.531	-30.677	3.296
2s1/2	- 3.275	-59.126	17.430	-20.705	4.149

Tableau 7 : O^{17} . Potentiels de Wood-Saxon, voir légende du tableau 4.

N = 20		R_{20} = 3.069 fm			
Etat	ε (Mev)	v_o (Mev)	ε_c (Mev)	ε_p (Mev)	r_{qm} (fm)
1s1/2	-33.872	-55.627	12.057	-45.929	2.021
1p3/2	-21.835	-61.325	21.139	-42.974	2.549
1p1/2	-15.655	-52.504	19.077	-34.732	2.692
1d5/2	- 4.146	-59.208	25.252	-29.398	3.361
2s1/2	- 3.275	-55.627	17.009	-20.284	4.186
1d3/2	- 0.100	-50.683	19.136	-19.236	4.357

Tableau 8 : F^{19} . Potentiels de Wood-Saxon, voir légende du tableau 4. Les énergies de liaison de particules indépendantes sont celles déterminées à partir des spectres expérimentaux des noyaux : N^{15}, O^{16} et O^{17} (Fig. 3), sauf pour les états 1s et 1d3/2. L'état 1s est défini par le potentiel qui reproduit l'état 2s. L'état 1d3/2 de neutron, non lié dans O^{17}, est approché par l'état peu lié d'énergie -0.1 Mev.

III.3. L'INTERACTION A DEUX CORPS.

III.3.1. Interprétations des forces à deux corps effectives.

Dans le hamiltonien H (II.1.1), nous supposerons les forces à deux corps prépondérantes.

L'interaction à deux corps $V^{(2)}$ utilisée doit représenter certaines caractéristiques de l'interaction nucléon-nucléon à basse énergie et tenir compte, dans la mesure du possible des configurations omises dans l'espace restreint (II.1.2), et des erreurs introduites dans le traitement semi-phénoménologique du problème self-consistant de la détermination de $V^{(1)}$.

- Dans une première interprétation, laissons les nucléons interagir uniquement par l'intermédiaire de ce potentiel effectif à deux corps, soit :

$$V = V^{(2)} \quad . \tag{III-21}$$

Cependant, le potentiel à un corps $V^{(1)}$ figure dans les termes correctifs d'antisymétrisation (II-44), et par l'intermédiaire des fonctions d'onde radiales, intervient dans le calcul des éléments de matrice à deux corps.

Pour les noyaux décrits comme un coeur et une couche externe, les potentiels V^{L} et V^{NL} (E-44) seront la somme de deux termes, l'un dû aux interactions avec les nucléons du coeur, et l'autre avec ceux de la couche externe. Cette séparation est détaillée en (E.3.2).

- Nous comparerons, dans le cas du F^{19}, cette première interprétation, avec celle, habituelle, qui consiste à remplacer les termes d'interaction avec le coeur par le champ moyen $V^{(1)}$. C'est alors l'interaction résiduelle $\mathcal{V}$ qui est égale à la force effective $V^{(2)}$:

$$\mathcal{V} = V - V^{(1)} = V^{(2)} \tag{III-22}$$

III.3.2. Paramètres de la force centrale.

a) Nous nous limiterons, comme dans beaucoup de travaux de spectroscopie nucléaire, à une force nucléon-nucléon centrale, c'est à dire scalaire à la fois dans les espaces de moment orbital, de spin et d'isospin. On exclut ainsi les forces tenseur et spin-orbite (ou dépendante des vitesses).

Même avec ces hypothèses simplificatrices, quatre types de potentiels d'échange sont possibles. On leur attribuera la même dépendance spatiale, d'où la forme

générale de l'interaction à deux corps considérée :

$$V^{(2)}_{1,2} = V_o f\left(\frac{r_{12}}{\mu}\right)\left(W + M P_r + B P_\sigma - H P_\tau\right), \qquad \text{(III-23)}$$

où P_r, P_σ et P_τ sont respectivement les opérateurs d'échange des variables d'espace, de spin et d'isospin :

$$P_\sigma = \frac{1}{2}\left(1 + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2\right) \quad , \quad P_\tau = \frac{1}{2}\left(1 + \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2\right) . \qquad \text{(III-24)}$$

Si la profondeur V_o est prise comme paramètre indépendant, les quatre autres coefficients sont reliés par une relation linéaire arbitraire, par exemple :

$$W + M + B + H = 1 . \qquad \text{(III-25)}$$

Ce n'est que dans le cas où les états considérés sont totalement antisymétrisés, que P_r s'exprime en fonction de P_σ et P_τ suivant :

$$P_r = - P_\sigma P_\tau . \qquad \text{(III-26)}$$

On en déduit alors deux nouvelles expressions de cette interaction à deux corps :

$$V^{(2)}_{1,2} = V_o f\left(\frac{r_{1,2}}{\mu}\right)\left(a_o + a_\sigma \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 + a_\tau \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 + a_{\sigma\tau} \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \, \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2\right) \qquad \text{(III-27)}$$

$$= V_o f\left(\frac{r_{1,2}}{\mu}\right)\left(V^{S=0\,T=0} P_{S=0} P_{T=0} + V^{S=0\,T=1} P_{S=0} P_{T=1} + V^{S=1\,T=0} P_{S=1} P_{T=0} + V^{S=1\,T=1} P_{S=1} P_{T=1}\right), \qquad \text{(III-28)}$$

où P_S et P_T sont les projecteurs sur les états singulet et triplet de spin et d'isospin, définis par :

$$P_{S=0} = \frac{1}{4}\left(1 - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2\right) \quad , \quad P_{S=1} = \frac{1}{4}\left(3 + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2\right) . \qquad \text{(III-29)}$$

Ces différentes paramétrisations sont reliées par les relations suivantes :

$$\begin{cases} V^{S=0\,T=0} = a_o - 3a_\sigma - 3a_\tau + 9a_{\sigma\tau} \\ V^{S=0\,T=1} = a_o - 3a_\sigma + a_\tau - 3a_{\sigma\tau} \\ V^{S=1\,T=0} = a_o + a_\sigma - 3a_\tau - 3a_{\sigma\tau} \\ V^{S=1\,T=1} = a_o + a_\sigma + a_\tau + a_{\sigma\tau} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_o = W - \frac{1}{4}M + \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}H \\ a_\sigma = -\frac{1}{4}M + \frac{1}{2}B \\ a_\tau = -\frac{1}{4}M - \frac{1}{2}H \\ a_{\sigma\tau} = -\frac{1}{4}M \end{cases} \qquad \text{(III-30)}$$

Nous donnons en (E.2.2), le détail du calcul des éléments de matrice à deux

corps, pour une telle interaction paramétrisée par a_o, a_σ, a_τ et $a_{\sigma\tau}$.

b) Afin de pouvoir discuter la dépendance des résultats en fonction du caractère d'échange des forces effectives nous avons utilisé plusieurs interactions dont les paramètres sont donnés dans le tableau 9.

La force nucléon-nucléon dans le noyau dépend de la densité. A basse densité, la force obtenue par J.W. Negele[24] tend vers l'interaction libre qui est peu différente de celle de Serber. Par contre, elle ressemble plus à la force de Rosenfeld à l'intérieur du noyau, là où la densité est forte.

Les paramètres de Rosenfeld satisfont la condition de saturation :

$$4W - M + 2B - 2H = 0 \quad , \tag{III-31}$$

déduite d'un modèle soluble des équations de Hartree-Fock[25].

La force de Serber est donc bien adaptée aux problèmes de diffusion qui correspondent pour le neutron incident à une région de faible densité nucléaire, cela d'autant plus que l'antisymétrisation contribue à empêcher le nucléon incident de pénétrer dans le noyau cible.

La force I.G.E.1 est phénoménologique, ses paramètres ont été ajustés pour reproduire les données spectroscopiques[26]. Les valeurs des rapports :

$$0.6 \leqslant \frac{V^{S=0\ T=1}}{V^{S=1\ T=0}} \leqslant 0.8 \quad , \qquad \frac{V^{S=1\ T=1}}{V^{S=0\ T=1}} = -0.4 \quad , \tag{III-32}$$

sont celles que l'on trouve dans la plupart des forces effectives. Le premier rapport exprime la prépondérance de la force triplet paire (alignement) sur la force singulet paire (appariement). Une telle valeur de ce rapport conduit en particulier à une bonne représentation des états vibrationnels pour les noyaux à une couche fermée, dans un schéma d'excitation à deux quasi-particules et particule-trou.

La valeur du deuxième rapport est obtenue à partir de l'interprétation des spectres à deux nucléons identiques des noyaux légers (C^{14}, N^{14}, O^{18}...) dans le cadre du modèle des couches.

La force singulet impaire $V^{S=0\ T=0}$, n'est pas bien déterminée. En effet, les données expérimentales y sont souvent peu sensibles, car elle agit seulement dans les états de moment orbital relatif impair avec un faible poids statistique en spin et isospin. Aussi, nous avons fait varier ce terme en lui donnant

Paramètres	Serber	I.G.E. 1	I.G.E. 2	I.G.E. 3	Rosenfeld
W	0.5	0.57	0.37	0.17	-0.13
M	0.5	0.33	0.53	0.73	0.92
B	0	-0.23	-0.03	0.17	0.46
H	0	0.33	0.13	-0.07	-0.26
a_o	0.375	0.208	0.157	0.107	0
a_σ	-0.125	-0.197	-0.147	-0.098	0
a_τ	-0.125	-0.248	-0.197	-0.147	-0.1
$a_{\sigma\tau}$	-0.125	-0.083	-0.132	-0.182	-0.23
$V^{S=0\ T=0}$	0	0.8	0	-0.8	-1.77
$V^{S=0\ T=1}$	1	0.8	0.8	0.8	0.6
$V^{S=1\ T=0}$	1	1	1	1	1
$V^{S=1\ T=1}$	0	-0.32	-0.32	-0.32	-0.33

Tableau 9 : Paramètres de la force centrale à deux corps définie en (III.3.2). Ces valeurs correspondent à une profondeur V_o négative.

les valeurs : 0.8 donnée en référence[26] , et 0 et -0.8 pour les forces notées respectivement I.G.E.2 et I.G.E.3 (Tab. 9) ; dans le cas de la force de Rosenfeld, cette valeur est -1.77.

c) Nous avons utilisé une dépendance radiale gaussienne :

$$f\left(\frac{r_{1,2}}{\mu}\right) = e^{-\left(\frac{r_{1,2}}{\mu}\right)^2} , \qquad \text{(III.33)}$$

de portée μ égale à 1.48 fermi.

En fait, dans le cadre des approximations faites, la forme détaillée de la dépendance radiale de l'interaction effective n'est pas importante.

En (E.2.2a), on donne les développements multipolaires correspondant à des formes gaussienne et de Yukawa. Remarquons que dans le cas d'une gaussienne et de fonctions d'onde radiales d'oscillateur harmonique, seul le produit sans dimension $\alpha\mu$ intervient dans les intégrales radiales des éléments de matrice .

III.3.3. Déterminations de la profondeur V_o.

a) Dans le cas des noyaux magiques C^{12} et O^{16}, et voisins C^{13} et O^{17}, la profondeur V_o de l'interaction à deux corps sera déterminée de façon à reproduire l'état lié cible plus neutron incident, couplé aux nombres quantiques de la voie considérée.

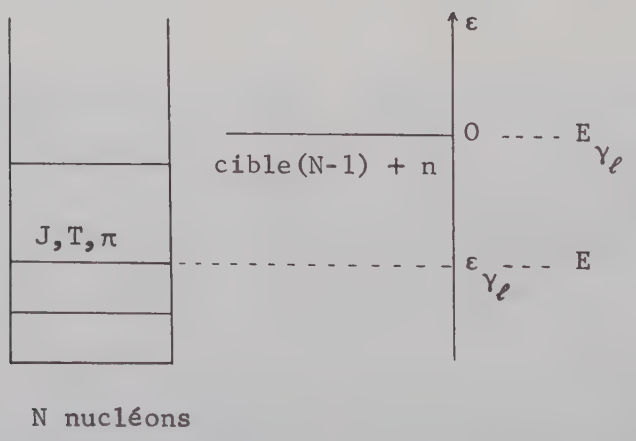


Figure 5 : Energie d'excitation négative $\varepsilon_{\gamma_\ell}$ pour déterminer V_o .

Pour cela, on résoudra les équations (II-42) pour une valeur négative de l'énergie d'excitation $\varepsilon_{\gamma_\ell} = E - E_{\gamma_\ell}$ (Fig. 5), égale à la valeur expérimentale de l'énergie de l'état excité à N nucléons liés, de mêmes nombres quantiques (spin, isospin et parité) que la voie de diffusion considérée, rapportée

au fondamental de la cible plus un neutron à l'infini.

Dans ce cas, les équations (II-42) n'ont de solutions liées, (correspondant à une fonction d'onde $\varphi(r)$ ayant un comportement exponentiellement décroissant pour les grandes valeurs de r) que pour des valeurs discrètes de V_o. La méthode numérique pour déterminer ces valeurs est indiquée en (F.3.3).

On devra s'assurer que la fonction d'onde radiale de l'état individuel trouvé, possède le nombre de noeuds désirés. Dans les cas considérés, on cherchera à reproduire l'état lié, fondamental de la cible plus neutron dans l'état 2s, correspondant à une fonction d'onde radiale ayant deux noeuds, origine exclue et infini inclus.

Cette détermination de V_o repose sur l'idée que le même potentiel dans le formalisme utilisé, doit reproduire aussi bien les états de diffusion que les états liés. Cette méthode est limitée par la possibilité d'identifier les états excités du noyau à N nucléons liés, à des configurations obtenues en couplant l'état fondamental de la cible avec le neutron incident dans un état individuel lié déterminé.

b) Ces valeurs de V_o seront comparées à celles obtenues pour reproduire la valeur expérimentale de l'énergie de liaison du noyau cible d'une part, et la longueur de diffusion d'autre part.

Dans ce dernier calcul, on devra encore s'assurer que le nombre de noeuds de la fonction d'onde radiale obtenue est correct. En effet, le même comportement asymptotique et donc la même longueur de diffusion, peut être obtenu pour différentes valeurs de V_o correspondant à des fonctions d'onde radiales ayant des nombres de noeuds différents.

Le nombre de noeuds de la fonction d'onde radiale de diffusion à énergie nulle est égal à celui de l'état s le moins lié dans le champ moyen.

III.4. NOUVELLES TRONCATURES DE L'ESPACE DE CONFIGURATIONS.

En (II.1.2), on a défini la troncature de l'espace de configurations qui caractérise le modèle présenté au chapitre II.Cependant, même avec ces restrictions, l'espace est encore beaucoup trop grand pour que des calculs pratiques puissent être réalisés.

Dans ce but, de nouvelles restrictions sont apportées, pour d'une part, simplifier la description des états à N et N-1 nucléons, et d'autre part permettre un

traitement correct de l'antisymétrisation avec les états s liés. Nous avons vu en effet en (II.4.2), que l'étude de l'antisymétrisation ne pouvait être séparée de l'espace de configurations adopté.

III.4.1. Etats de la cible, prédiagonalisation. (cf. D.2.1)

Pour les états $|\tilde{\gamma}_\ell\rangle_n$ (II-20) de la cible, déterminés en principe par la diagonalisation (II.3.1) de H dans le sous-espace des états à N-1 nucléons liés, on se limitera au fondamental $|\tilde{\gamma}_o\rangle_n$.

Cette approximation exclut la possibilité d'étudier les effets de polarisation de la cible par le neutron incident.

a) Dans le cas des noyaux magiques C^{12}, O^{16} et Ca^{40} ainsi que des noyaux voisins C^{13} et O^{17}, on adoptera le modèle le plus simple, qui consiste à décrire l'état fondamental de ces noyaux par une configuration unique de particules indépendantes, correspondant au remplissage des états individuels en dessous du niveau de Fermi.

Cette description est basée sur la grande distance en énergie qui sépare le niveau de Fermi de la couche suivante. Cette séparation en énergie est de l'ordre de 14 Mev pour C^{12}, 11 Mev pour O^{16} (Fig. 3) et 8 Mev pour le Ca^{40}.

On néglige ainsi les configurations à n particules-n trous qui peuvent cependant, par l'intermédiaire de l'interaction entre les nucléons excités, donner naissance à des états suffisamment bas en énergie pour participer de façon appréciable à la description du fondamental [27].

L'état fondamental des noyaux C^{12}, O^{16} et Ca^{40} est ainsi constitué de doubles couches complètes en protons et neutrons, couplées à zéro en spin et isospin (D-34).

Les noyaux C^{13} et O^{17} sont décrits par un état de particule, respectivement 1p1/2 et 1d5/2, au-dessus des coeurs fermés de C^{12} et O^{16}. Ces états sont définis en (D.2.1a).

b) Etape de prédiagonalisation (II.3.1) dans le cas du F^{19}.

Négligeant encore les excitations particule-trou du coeur de O^{16}, l'état fondamental du F^{19} est décrit (D-35, 36) comme un coeur fermé de O^{16} et une couche externe à un proton et deux neutrons dans la couche 2s-1d, couplée aux valeurs expérimentales du spin et de l'isospin 1/2, 1/2.

$\{(j_1,j_2)I_2,j_3\}1/2,1/2$	N°	I	II	III	IV
$(5/2)^2$ 21, 5/2	1	-0.55	-0.31	-0.31	-0.43
$(5/2)^2$ 01, 1/2	2	0.16	0.59	0.59	0.68
$(5/2)^2$ 10, 1/2	3	-0.41	-0.35	-0.38	-0.40
$(5/2)^2$ 10, 3/2	4	0	-0.05	-0.09	-0.11
$(5/2)^2$ 21, 3/2	5	0	0.21	0.13	0.17
(5/2,1/2) 20, 3/2	6	0	-0.19	-0.17	-0.15
(5/2,1/2) 21, 3/2	7	0	-0.34	-0.13	-0.07
5/2, $(3/2)^2$ 21	8	0	0.13	0.09	0.09
5/2, $(3/2)^2$ 30	9	0	0.01	0.02	0.02
$(1/2)^2$ 01, 1/2	10	0.71	0.40	0.54	0.29
$(1/2)^2$ 10, 3/2	11	0	-0.03	0.01	0.01
1/2, $(3/2)^2$ 01	12	0	-0.22	-0.20	-0.18
1/2, $(3/2)^2$ 10	13	0	-0.04	-0.08	-0.06
$(3/2)^2$ 21, 3/2	14	0	0.04	0.04	0.03

Tableau 11 : Mélanges de configurations décrivant le fondamental du F^{19} :

I - A. Arima, communication privée : modèle SU(3) [31], état utilisé dans la référence [32].

II - A. Zuker, communication privée : diagonalisation avec des éléments de matrice de Kahana, Lee et Scott [29], et des énergies de particules indépendantes expérimentales ε_i différentes pour protons et neutrons (Fig. 3).

III - Diagonalisation avec des éléments de matrice de la force de Serber (Tab. 9) de profondeur V_o = -68 Mev, sur des états d'oscillateur harmonique (Tab. 2), les ε_i sont les mêmes qu'en II.

IV - Analogue à III, mais avec des fonctions d'onde radiales de Wood-Saxon (Tab. 8), et une profondeur de la force à deux corps V_o = -72 Mev.

Les 14 configurations possibles pour ces trois nucléons, compte tenu des couplages et des règles de sélection dus à l'antisymétrisation, sont construites explicitement en (D.2.1b), et résumées dans le tableau 11.

Nous avons comparé le fondamental obtenu à partir de diverses diagonalisations de l'hamiltonien H :

- L'état II est obtenu par A. Zuker[28] avec des éléments de matrice de Lee, Kahana et Scott[29], et des énergies de particules indépendantes déduites des spectres expérimentaux de O^{17} et F^{17} (Fig. 3).

- Avec les énergies de particules indépendantes ε_i précédentes, la diagonalisation des éléments de matrice de Serber (Tab. 9), nous a donné les mélanges de configurations III et IV, en utilisant respectivement des fonctions d'onde radiales d'un oscillateur harmonique isotrope (Tab. 2) et celles d'un puits de Wood-Saxon (Tab. 8).

Dans ce dernier calcul, les potentiels de Wood-Saxon reproduisent (III.2.2b) les énergies de particules indépendantes des états de neutron 1d5/2 et 2s1/2 (Fig. 3). Par contre, l'état 1d3/2 de neutron non lié dans le champ moyen de O^{17} (ε = + 0.934 Mev) est approché par un état peu lié 1d3/2 (ε = -0.1 Mev).

La profondeur V_o de l'interaction à deux corps est ajustée de façon à reproduire l'énergie de liaison expérimentale du F^{17}, E_ℓ = -147.801 Mev[30], on obtient un très bon accord avec le mélange de configurations obtenu par A. Zuker. Ce résultat n'est pas étonnant pour des noyaux à peu de nucléons dans la couche 2s-1d, pour lesquels la géométrie des couplages joue un rôle plus important que l'interaction à deux corps elle-même. Nous avons d'ailleurs obtenu pratiquement le même état fondamental en diagonalisant les quatre autres forces à deux corps données dans le tableau 9.

III.4.2. Configurations à N nucléons. (cf. D.2.3)

a) Etats à N-1 nucléons liés et un dans le continu.

A basse énergie, seule l'onde s de diffusion intervient. Par suite, les seules voies de réaction que l'on considère sont définies par les couplages du fondamental de la cible avec l'état individuel de diffusion $|\varphi_s\rangle$ (D-60) :

$$|\Psi(\widetilde{1,\cdots,N})\,JT\rangle_n = \frac{1}{\sqrt{N}}\,\mathcal{A}(N-1,1)\left(|\gamma_o(\widetilde{1,\cdots,N-1})\,I\tau\rangle_n\,|\varphi_s(N)\rangle\right)JT, \qquad \text{(III-34)}$$

où I et τ sont respectivement le spin et l'isospin de la cible.

b) États à N nucléons liés.

Le choix de l'espace de configurations pour ces états est étroitement lié au traitement de l'antisymétrisation.

Pour les noyaux magiques et voisins, l'étude de l'antisymétrisation sera faite au chapitre IV dans le cadre du modèle décrit en (II.4.2), en se limitant au seul état à N nucléons liés obtenu en antisymétrisant l'état de la cible avec l'état individuel 2s inoccupé.

Pour le traitement complexe de l'antisymétrisation dans le cas du mélange de configurations du F^{19}, nous examinerons au chapitre V deux modèles pour décrire les états à N nucléons liés correspondant au F^{20}.

Le premier consiste à introduire un seul état à 20 nucléons liés obtenu par antisymétrisation de l'état fondamental du F^{19} avec l'état 2s. La construction explicite de cet état est donnée en (D.2.3b).

Dans un deuxième modèle, on agrandit l'espace en considérant tous les états antisymétrisés à trois neutrons et un proton dans la couche 2s-1d, incluant au moins un état 2s, et couplés aux spin et isospin des voies de réaction : ($J = 0$, $T = 1$) et ($J = 1$, $T = 1$). La liste de ces configurations est donnée dans les tableaux 30 et 31.

CHAPITRE IV

TRAITEMENT DE L'ANTISYMETRISATION DANS DES CAS SIMPLES

IV.1. DIFFUSION DE NEUTRONS DE BASSE ENERGIE DANS UN MODELE SIMPLE D'ESPACE DE CONFIGURATIONS.

Appliquons le modèle simple décrit en (II.4.2) à la diffusion des neutrons de basse énergie sur les noyaux magiques C^{12}, O^{16} et Ca^{40}, et sur les noyaux voisins C^{13} et O^{17}.

Les états s liés dans le champ moyen de ces noyaux sont : 1s et 2s. Dans l'état $|\tilde{\gamma}_o\rangle_n$ de particules indépendantes, décrivant le fondamental de ces cibles (III.4.1a), l'état 1s est seul occupé, sauf dans le Ca^{40} où 2s l'est aussi.

Pour ces noyaux, Ca^{40} excepté, l'état général à N nucléons adopté en (III.4.2) est le suivant :

$$|\tilde{\Psi}\rangle = a\frac{1}{\sqrt{N}}\mathcal{A}(N-1,1)\left(|\tilde{\gamma}_o\rangle_n |2s1/2\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{N}}\mathcal{A}(N-1,1)\left(|\tilde{\gamma}_o\rangle_n |\varphi_s\rangle\right) . \qquad \text{(IV-1)}$$

Le nouvel état individuel de diffusion, défini en (II-54), inclut les composantes sur les états à une particule liés, inoccupés dans la cible et de mêmes nombres quantiques que l'état individuel de diffusion, soit ici :

$$|\psi_s\rangle = a\,|2s1/2\rangle + |\varphi_s\rangle \quad . \qquad \text{(IV-2)}$$

L'état à N nucléons s'écrit alors :

$$|\tilde{\Psi}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\mathcal{A}(N-1,1)\left(|\tilde{\gamma}_o\rangle_n |\psi_s\rangle\right) . \qquad \text{(IV-3)}$$

Nous avons montré en (II.4.2) qu'il était possible dans l'espace restreint, limité aux états $|\tilde{\Psi}\rangle$, d'éliminer les termes correctifs d'antisymétrisation avec l'état 2s. Deux méthodes conduisant à des résultats identiques se présentent alors :

- Résoudre en a et $\varphi_s(r)$ les équations (II-42), qui couplent les configurations $|\gamma_o, \widetilde{2s1/2}\rangle_n$ et $|\widetilde{\gamma_o, \varphi_s}\rangle_n$, et où sont présents les termes correctifs d'antisymétrisation avec 1s et 2s qui assurent l'orthogonalité (II-46) de $|\varphi_s\rangle$ avec ces états liés.

- Résoudre en $|\psi_s\rangle$ une seule équation du type (II-58) où figure uniquement le terme correctif d'antisymétrisation avec l'état 1s ; le nouvel état individuel de diffusion $|\psi_s\rangle$ ainsi déterminé est orthogonal à 1s et sa composante sur 2s définit le coefficient a :

$$a = \langle 2s\,1/2 \mid \psi_s \rangle \quad . \tag{IV-4}$$

C'est cette dernière méthode, plus simple que nous utilisons.

Notons que la configuration $|\gamma_o, \widetilde{2s1/2}\rangle_n$ n'est pas nécessairement la seule qui puisse se coupler avec l'état de diffusion $|\widetilde{\gamma_o, \varphi_s}\rangle_n$. En effet, les arguments utilisés pour justifier que l'on se limite à l'onde s de diffusion à basse énergie, ne s'appliquent pas aux nucléons liés. Les seules contraintes pour les états à N nucléons liés sont les lois de conservation du spin, de l'isospin et de la parité. En particulier, cette dernière implique que ces états soient de même parité que l'état fondamental de la cible.

Mais, l'introduction de configurations à N nucléons liés, autres que $|\gamma_o, \widetilde{2s1/2}\rangle_n$, nous amène à coupler différentes voies de réaction γ dans les équations (II-58) et même, dans le cas d'un mélange de configurations, à sortir du cadre du modèle simple (II.4.2). Nous réservons cette étude pour le F^{19} (chapitre V).

Pour le Ca^{40}, l'état 3s n'étant pas lié dans le champ moyen, seule la configuration :

$$|\widetilde{\Psi}\rangle = \frac{1}{\sqrt{41}}\, \mathcal{A}(40,1)\left(|\widetilde{\gamma_o}\rangle_n \mid \varphi_s\rangle\right) \tag{IV-5}$$

sera considérée, conduisant à une équation en $|\varphi_s\rangle$ de type (II-58), comprenant les termes d'antisymétrisation avec les états occupés 1s et 2s.

Dans ce chapitre, nous utiliserons uniquement la première interprétation (III.3.1) de la force effective $V^{(2)}$ à savoir : les nucléons interagissent par l'intermédiaire de $V^{(2)}$, soit $V = V^{(2)}$. Cela revient à remplacer le champ moyen $V^{(1)}$ par le potentiel (E-44) comprenant deux termes V^L et V^{NL}, l'un local et l'autre non local. Nous comparerons (Figs. 9 et 10) l'état 2s lié dans ce

dernier potentiel avec celui du champ moyen local $V^{(1)}$, utilisé pour définir les fonctions d'onde radiales.

Dans le cas d'un état de particules indépendantes à doubles couches complètes, seul le terme a_o de la force centrale à deux corps (III-27) contribue au potentiel local. Cela explique la valeur anormalement grande trouvée pour la profondeur V_o de la force de Rosenfeld pour laquelle $a_o = 0$.

IV.2. DISCUSSION DES RESULTATS POUR LES NOYAUX MAGIQUES.

Pour ces noyaux C^{12}, O^{16} et Ca^{40}, de spin nul dans l'état fondamental, nous considérons une seule voie de réaction, la voie $J^\pi = 1/2^+$.

IV.2.1. Résultats pour C^{12}.

a) Voie de réaction et déterminations de V_o :

Négligeant les excitations particule-trou du coeur, le seul état à 13 nucléons liés, couplés à la voie de réaction $1/2^+$ est : $|(C^{12}, \widetilde{2s1/2})\rangle_n$.

- C'est cette configuration, identifiée avec l'état excité $1/2^+$ du C^{13} d'énergie $\varepsilon_{1/2^+} = -1.861$ Mev rapportée au fondamental du C^{12} plus un neutron à l'infini (Fig. 6), que l'on utilise pour déterminer la profondeur V_o de la force à deux corps (III.3.3a).

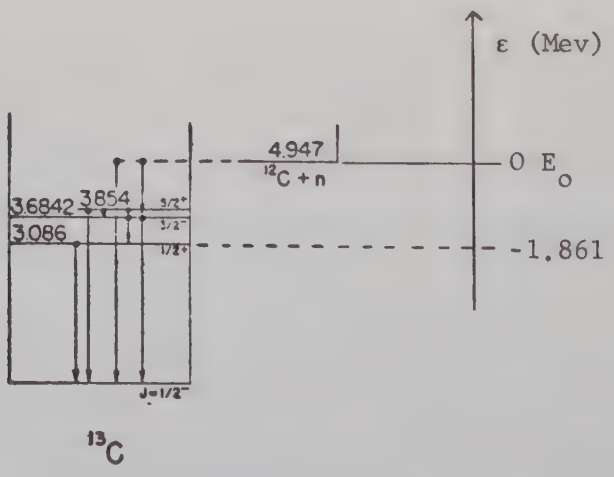


Figure 6 : Energie de liaison $\varepsilon_{1/2^+}$ de l'état excité $1/2^+$ du C^{13}, rapportée au fondamental du C^{12} plus un neutron à l'infini[18].

Les valeurs ainsi calculées pour les différentes interactions (Tab. 9) sont indiquées dans le tableau 12.

Force	Oscillateur harmonique E_c = 207.51 Mev			Wood-Saxon E_c = 254.27 Mev		
	E_ℓ	$\varepsilon_{1/2+}$	b_{ex}	E_ℓ	$\varepsilon_{1/2+}$	b_{ex}
Serber	-76.05	-65.11	-64	-69.08	-62.14	-61
I.G.E. 1	-90.65	-88.74	-87	-83.51		
I.G.E. 2	-94.62	-97.84	-97	-87.70		
I.G.E. 3	-98.11	-108.21	-107	-91.75		
Rosenfeld	-120.77	-158.89	-157	-115.51		

Tableau 12 : C^{12} - Comparaison des profondeurs V_o(Mev) des forces à deux corps, déterminées de façon à reproduire :
- l'énergie de liaison expérimentale E_ℓ du C^{12},
- l'état $1/2^+$ du C^{13} d'énergie $\varepsilon_{1/2^+}$ (Fig. 6),
- la longueur de diffusion expérimentale b_{ex},

pour différentes forces (Tab. 9) et des fonctions d'onde radiales d'oscillateur harmonique (Tab. 2) et de Wood-Saxon (Tab. 4).

La fonction d'onde radiale de l'état lié, déterminée par la résolution de l'équation (II-58) pour l'énergie d'excitation négative $\varepsilon_{1/2^+}$, est très proche de celle de l'état 2s des potentiels de Wood-Saxon (Tab. 4), quand on utilise ces derniers pour définir les fonctions d'onde radiales de la cible. Ainsi pour toutes les forces, le recouvrement entre ces deux fonctions est 0.99.

Le potentiel non local vu par le neutron incident est donc, au moins pour les états s, très peu différent du potentiel local de Wood-Saxon ayant le rayon du noyau et la profondeur qui reproduit l'énergie de liaison de cet état 2s. Ceci explique que pour la valeur trouvée V_o = -62.14 Mev (Tab. 15), l'état de diffusion à énergie nulle, calculé en antisymétrisant avec l'état 1s, a une composante très faible (0.007) sur l'état 2s. En effet, ces états $|\psi_s\rangle$ et $|2s1/2\rangle$ sont états propres de potentiels pratiquement identiques.

Par contre, si on utilise des fonctions radiales d'oscillateur harmonique (Tab. 14), la composante de $|\psi_s\rangle$ sur 2s reste importante (0.6) même pour la valeur de V_o déterminée comme ci-dessus. Cela résulte de la différence entre les comportements asymptotiques aux grandes distances des fonctions radiales des états propres du potentiel non borné d'oscillateur harmonique, et celles des états liés d'un puits réaliste (cf. comparaisons analogues dans le cas de O^{16} Figs. 4, 9 et 10).

- Les valeurs précédentes de V_o sont comparées à celles obtenues de façon à reproduire l'énergie de liaison expérimentale du C^{12}, $E_\ell = -92.163$ Mev[30]. Cette énergie est la somme des énergies cinétique, coulombienne et nucléaire.

L'énergie cinétique est, dans le cas de fonctions radiales d'oscillateur harmonique (Tab. 2), donnée par :

$$E_c = 13\ \tfrac{1}{2}\hbar\omega = 207.51 \text{ Mev} , \qquad \text{(IV-6)}$$

et dans celui de fonctions radiales de Wood-Saxon (Tab. 4) par :
$E_c = 254.27$ Mev.

L'énergie coulombienne peut être évaluée en perturbation sur l'état de particules indépendantes :

- soit à l'aide de l'approximation :

$$E_{cb.} = \frac{3}{5} e^2 \frac{Z(Z-1)}{R} = 0.864 \frac{Z(Z-1)}{R\,(fm)} \ (Mev) , \qquad \text{(IV-7)}$$

obtenue en négligeant les corrélations entre les protons, $\rho_p(r,r') \simeq \rho_p(r)\rho_p(r')$, et en adoptant pour la densité de proton $\rho_p(r)$, une distribution uniforme de charge dans une sphère de rayon R,

- soit par un calcul microscopique de l'interaction à deux corps coulombienne (E-15) ; pour un coeur de couches ($i = n\ell j$) complètes on obtient :

$$E_{cb} = \sum_{i_1 \leqslant i_2} \sum_{\lambda} (2\lambda+1)\ {}_n\langle (\widetilde{i_1 i_2})\lambda\, 1 \,|\, V_{cb} \,|\, (\widetilde{i_1 i_2})\lambda\, 1\rangle_n , \qquad \text{(IV-8)}$$

si $i_1 = i_2$ λ pair

où $|(\widetilde{i_1 i_2})\lambda\, 1\rangle_n$ est une configuration à deux nucléons en couplage j-j.

Noyau	Z	E_{cb} app. (Mev)	E_{cb} (Mev)
C^{12}	6	10.54	7.80
O^{16}	8	17.72	13.12
Ca^{40}	20	95.17	71.05

Tableau 13 : Energies coulombiennes approchées (IV-7) et microscopiques (IV-8), calculées avec les valeurs des rayons et des constantes α de l'oscillateur harmonique données dans le tableau 2.

L'énergie coulombienne, calculée des deux façons précédentes, est indiquée dans le tableau 13 : la valeur approchée surestime cette énergie car le principe de Pauli est un type de corrélation qui implique que $\rho_p(r,r')$ soit plus petit que le produit $\rho_p(r)\ \rho_p(r')$ quand $r = r'$.

L'énergie nucléaire est calculée microscopiquement à partir des éléments de matrice à deux corps (E-11,32). Pour un état à doubles couches complètes ($i = n\ell jt$), on a :

$$E_n = \sum_{i_1 \leq i_2} \sum_{\lambda\mu} (2\lambda+1)(2\mu+1) \langle (\widetilde{i_1 i_2})\lambda\mu | V^{(2)} | (\widetilde{i_1 i_2})\lambda\mu \rangle_n \equiv V_o\, e_n$$

si $i_1 = i_2$ $\quad \lambda + \mu$ impair (IV-9)

où λ et μ sont les couplages en spin et isospin et e_n désigne une quantité sans dimension.

La profondeur V_o est alors déterminée par :

$$V_o = \frac{E_\ell - E_c - E_{cb}}{e_n} \quad . \qquad \text{(IV-10)}$$

Ces valeurs de V_o, correspondant aux différentes forces à deux corps, sont proches de celles trouvées précédemment.

- Enfin on obtient un très bon accord (Tab. 12, 14 et 15) entre les valeurs de V_o déterminées pour reproduire d'une part l'état excité $1/2^+$ du C^{13}, et d'autre part la longueur de diffusion expérimentale :

$$b_{ex} = 6.65 \text{ fm}^{[3]}.$$

FORCE	SANS ANTISYMETRISER AVEC 1s				ANTISYMETRISE AVEC 1s		
V_o (Mev)	b (fm)	r_e (fm)	$\langle 1s \mid \psi \rangle$	$\langle 2s \mid \psi \rangle$	b (fm)	r_e (fm)	$\langle 2s \mid \psi \rangle$
Serber							
-63	8.07	3.76	-0.1	0.78	7.00	3.50	0.68
-64	7.61	3.65	-0.1	0.74	6.66	3.40	0.64
-65.11*	7.19	3.55	-0.1	0.69	6.35	3.31	0.60
I.G.E. 1							
-87	7.87	3.72	-0.1	0.76	6.74	3.45	0.64
-88	7.56	3.65	-0.1	0.73	6.53	3.39	0.61
-88.74*	7.35	3.60	-0.1	0.71	6.38	3.35	0.59
I.G.E. 2							
-96	7.94	3.74	-0.1	0.76	6.73	3.46	0.63
-97	7.65	3.67	-0.1	0.74	6.54	3.40	0.61
-97.84*	7.44	3.62	-0.1	0.71	6.40	3.36	0.59
I.G.E. 3							
-106	8.13	3.78	-0.1	0.78	6.77	3.48	0.63
-107	7.85	3.72	-0.1	0.75	6.60	3.44	0.61
-108.21*	7.56	3.65	-0.1	0.72	6.42	3.38	0.58
Rosenfeld							
-156	8.56	3.86	-0.1	0.81	6.76	3.51	0.61
-157	8.34	3.82	-0.1	0.80	6.65	3.49	0.60
-158.89*	7.96	3.75	-0.1	0.76	6.47	3.43	0.57

Tableau 14 : C^{12} . Longueur de diffusion (valeur expérimentale b_{ex} = 6.65 fm[3]) et portée effective calculées en utilisant des fonctions d'onde radiales d'oscillateur harmonique (Tab. 2). Les valeurs de V_o marquées par * reproduisent l'état excité $1/2^+$ du C^{13} (Fig. 6).

Cela montre que le même potentiel, calculé à partir de forces à deux corps phénoménologiques, décrit aussi bien les états liés que les états de diffusion à basse énergie.

b) longueur de diffusion, portée effective et déphasage.

Les valeurs de V_o qui reproduisent l'état excité $1/2^+$ du C^{13}, permettent d'obtenir la longueur de diffusion expérimentale à 5% près, dans tous les cas étudiés (Tab. 14 et 15).

En négligeant le terme correctif d'antisymétrisation (II-44) avec 1s, on introduit dans l'état individuel de diffusion $|\psi_s\rangle$ une composante sur cet état lié. Bien que faible (0.1), cette composante introduit une erreur de l'ordre de 12% sur la longueur de diffusion, et de 7% sur la portée effective, ceci pour chacune des forces à deux corps utilisées avec des fonctions radiales d'oscillateur harmonique (Tab. 14) et pour la force de Serber avec des fonctions radiales d'un puits de Wood-Saxon (Tab. 15).

Force V_o (Mev)	SANS ANTISYMETRISER				ANTISYMETRISE AVEC 1s		
	b(fm)	r_e(fm)	$\langle 1s\|\psi\rangle$	$\langle 2s\|\psi\rangle$	b(fm)	r_e(fm)	$\langle 2s\|\psi\rangle$
Serber							
-55	13.15	4.30	-0.09	1.38	11.08	4.11	1.14
-60	7.71	3.55	-0.08	0.50	6.94	3.40	0.26
-61	7.25	3.45	-0.08	0.37	6.57	3.30	0.13
-62.14*	6.82	3.34	-0.08	0.23	6.22	3.19	-0.007
-65	6.03	3.10	-0.08	-0.08	5.57	2.97	-0.31

Tableau 15 : C^{12} - longueur de diffusion et portée effective calculées en utilisant des fonctions d'onde radiales de Wood-Saxon (Tab. 4). V_o = -62.14 Mev reproduit l'état excité $1/2^+$ du C^{13} (Fig. 6).

Les déphasages obtenus pour l'onde s, en utilisant d'une part des fonctions radiales d'oscillateur harmonique, et d'autre part celles de Wood-Saxon sont très semblables. Ils sont en bon accord avec les valeurs expérimentales [33,34] et celles obtenues par d'autres calculs d'équations couplées [35,36] et de

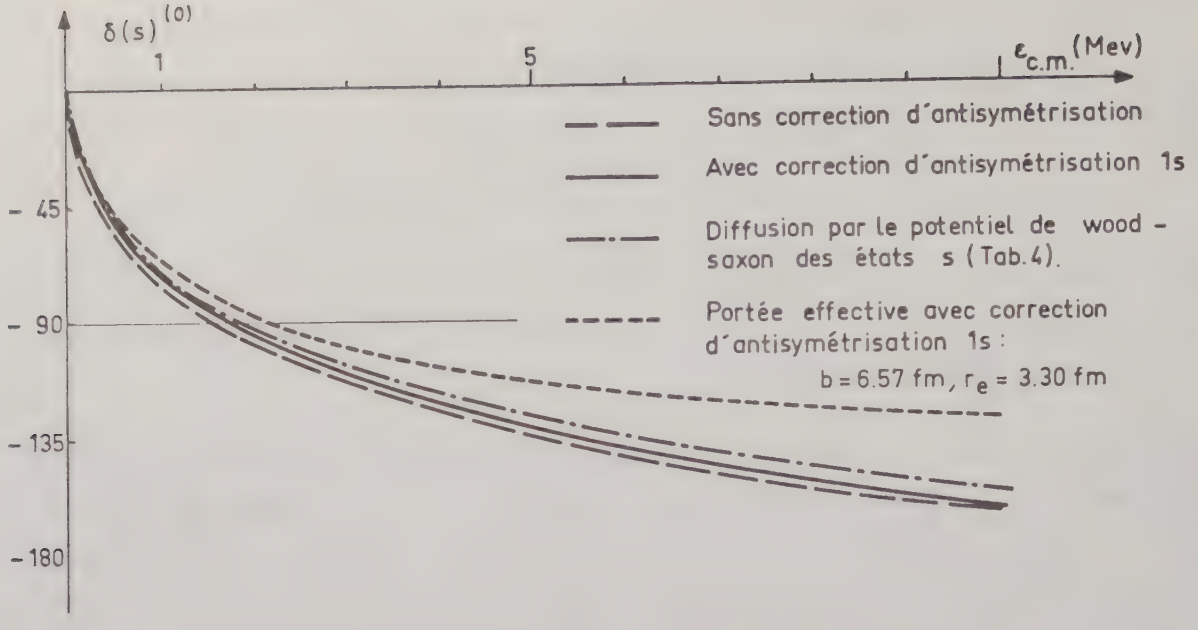


Figure 7 : C^{12}. Déphasages de l'onde s calculés en utilisant des fonctions d'onde radiales de Wood-Saxon (Tab.4) et la force à deux corps de Serber de profondeur V_0 = -61 Mev.

Serber V_0 = -61 Mev		SANS ANTISYMETRISER		ANTISYMETRISE AVEC 1s	
$\varepsilon_{c.m.}$ (Mev)	$\delta(U_s)$ °	δ °	b = 7.25 fm r_e = 3.45 fm	δ °	b = 6.57 fm r_e = 3.30 fm
0.2	-32.94	-37.84	-37.58	-34.77	-34.45
0.4	-45.72	-51.89	-51.21	-47.95	-47.36
0.6	-55.08	-61.88	-60.64	-57.58	-56.48
0.8	-62.64	-69.77	-67.91	-65.30	-63.63
1	-68.94	-76.36	-73.82	-71.80	-69.52
2	-91.62	-99.27	-92.97	-94.88	-88.96
4	-118.62	-125.93	-111.82	-122.24	-108.50
6	-136.08	-143.30	-121.95	-140.17	-119.12
8	-149.22	-156.40	-128.56	-153.70	-126.07
10	-159.66	-166.98	-133.33	-164.63	-131.08

Tableau 16 : C^{12}. Déphasages de l'onde s calculés en utilisant des fonctions radiales de Wood-Saxon (Tab.4) et une interaction de Serber de profondeur -61 Mev. $\delta(U_s)$ est le déphasage correspondant au potentiel de Wood-Saxon des états s. Les valeurs de b et de r_e définissent l'approximation de la portée effective.

Hartree-Fock[37].

La correction d'antisymétrisation avec l'état 1s, sur la valeur du déphasage est faible, elle est de l'ordre de deux degrés (Tab. 16 et Fig. 7).

Les déphasages calculés sont très proches de ceux que donne le potentiel de Wood-Saxon des états s (Tab. 16) ; nous avons déjà vu que ce potentiel local et le potentiel non local créé par l'interaction à deux corps, ont pratiquement le même état lié 2s.

Au-delà de l'énergie de 3 Mev, l'approximation de la portée effective introduit une erreur importante sur le déphasage (Fig. 7), supérieure à 10%.

La limitation aux ondes s de diffusion est valable dans un domaine en énergie que l'on peut évaluer de la façon suivante :

$$2 k R \lesssim 1 \qquad \text{soit} \qquad E \lesssim 1 \text{ Mev} ,$$

où R est le rayon du noyau cible et k l'impulsion du neutron incident. Cependant même à ces énergies, les ondes résonnantes de ℓ plus élevé peuvent intervenir.

c) L'ensemble des résultats obtenus précédement, aussi bien pour la longueur de diffusion que pour le déphasage, est très peu sensible à la valeur des paramètres d'échange des forces à deux corps que l'on a considérées (Tab. 9).

IV.2.2. Résultats pour O^{16}.

Les résultats obtenus pour O^{16} ressemblent beaucoup aux précédents.

La profondeur V_o de l'interaction à deux corps est ajustée de façon à reproduire l'état excité $1/2^+$ de O^{17} (Fig. 8), d'énergie :

$$\varepsilon_{1/2+} = -3.275 \text{ Mev}$$

rapportée au fondamental de O^{16}, et identifié à la configuration $|(\widetilde{O^{16}, 2s\,1/2})\rangle_n$.
Les profondeurs trouvées sont données dans le tableau 17.

La fonction d'onde radiale de l'état lié, déterminée par le calcul précédent, est comparée à celle du potentiel à un corps utilisé, oscillateur harmonique

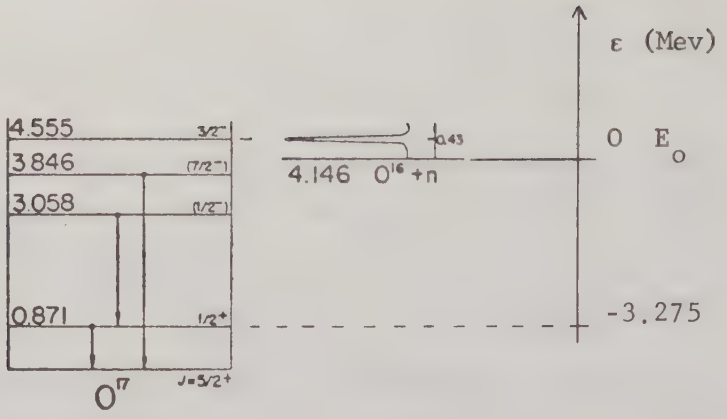


Figure 8 : Energie de liaison $\varepsilon_{1/2^+}$ de l'état excité $1/2^+$ de O^{17}, rapportée au fondamental de O^{16} plus un neutron à l'infini[19].

Force	Oscillateur harmonique E_c = 237.35 Mev			Wood-Saxon E_c = 316.74 Mev		
	E_ℓ	ε_{2s}	b_{ex}	E_ℓ	ε_{2s}	b_{ex}
Serber	-67.83	-57.30	-56	-58.90	-53.09	-51
I.G.E. 1	-81.28	-77.93	-77	-72.01		
I.G.E. 2	-84.36	-85.79	-85	-75.40		
I.G.E. 3	-87.12	-94.70	-94	-78.62		
Rosenfeld	-106.53	-138.02	-139	-98.41		

Tableau 17 : O^{16}. Comparaison des profondeurs V_0(Mev) des forces à deux corps, déterminées de façon à reproduire :

- l'énergie de liaison expérimentale E_ℓ de O^{16},
- l'état $1/2^+$ de O^{17}, d'énergie $\varepsilon_{1/2^+}$ (Fig. 8),
- la longueur de diffusion expérimentale b_{ex}, pour différentes forces (Tab.9) et des fonctions radiales d'oscillateur harmonique (Tab.2) et de Wood-Saxon (Tab.6).

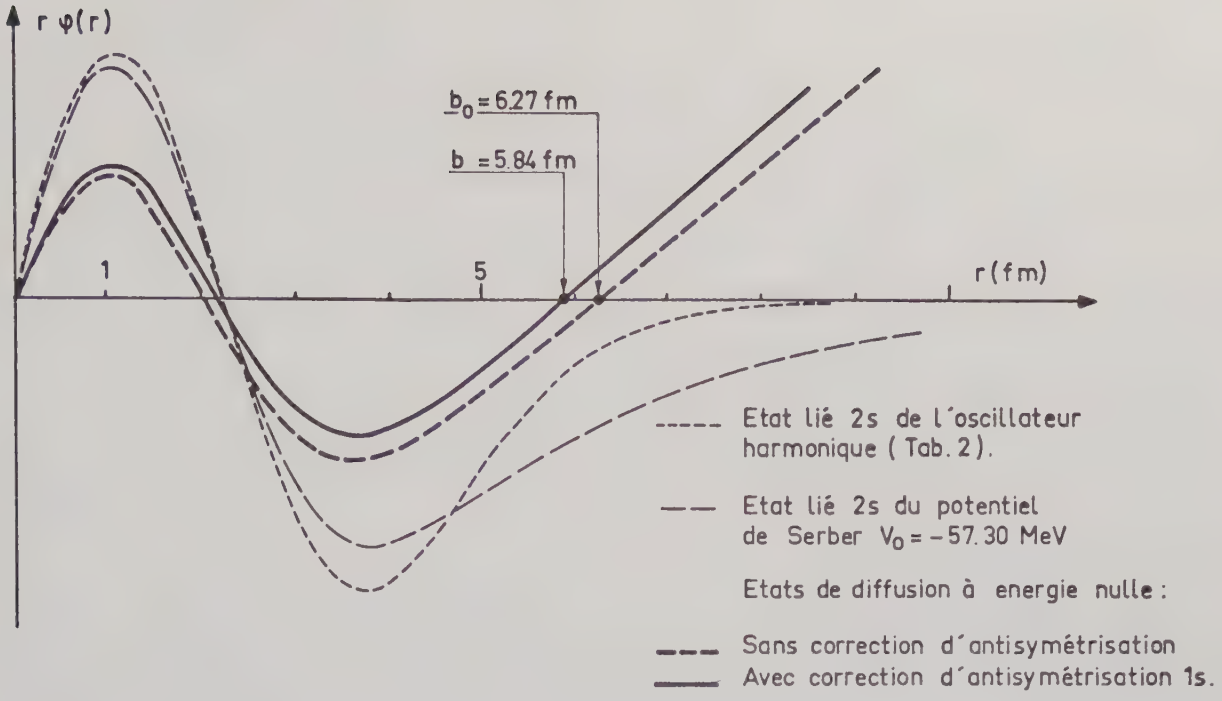


Figure 9 : O^{16}. Fonctions d'onde radiales multipliées par r, de l'état 2s et de l'état individuel de diffusion à énergie nulle, calculées avec un potentiel à un corps d'oscillateur harmonique(Tab. 2) et la force à deux corps de Serber de profondeur -56 Mev pour les états de diffusion.

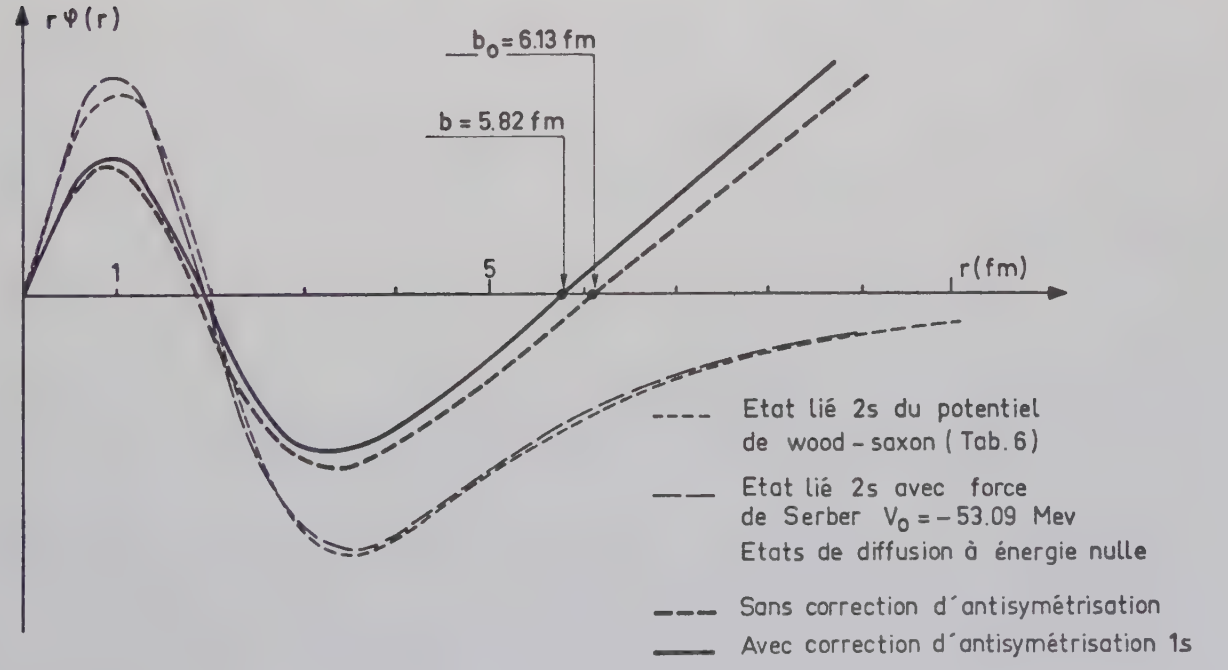


Figure 10 : O^{16}. Voir figure 9, mais avec potentiel à un corps de Wood-Saxon(Tab. 6).

FORCE	SANS ANTISYMETRISER AVEC 1s				ANTISYMETRISE AVEC 1s		
V_o (Mev)	b (fm)	r_e (fm)	$\langle 1s \mid \psi \rangle$	$\langle 2s \mid \psi \rangle$	b (fm)	r_e (fm)	$\langle 2s \mid \psi \rangle$
Serber							
-56	6.27	3.37	-0.08	0.54	5.84	3.23	0.47
-57	6.06	3.30	-0.08	0.50	5.67	3.16	0.43
-57.30*	6.01	3.27	-0.08	0.50	5.62	3.14	0.43
I.G.E. 1							
-76	6.30	3.41	-0.07	0.53	5.91	3.29	0.46
-77	6.15	3.35	-0.07	0.51	5.79	3.24	0.44
-77.93*	6.02	3.30	-0.07	0.49	5.68	3.19	0.42
I.G.E. 2							
-84	6.26	3.40	-0.07	0.53	5.90	3.29	0.45
-85	6.13	3.35	-0.07	0.50	5.79	3.25	0.43
-85.79*	6.04	3.32	-0.07	0.49	5.71	3.22	0.42
I.G.E. 3							
-93	6.25	3.41	-0.06	0.52	5.90	3.31	0.45
-94	6.13	3.37	-0.06	0.50	5.80	3.27	0.43
-94.70*	6.06	3.34	-0.06	0.49	5.74	3.25	0.42
Rosenfeld							
-137	6.20	3.42	-0.05	0.50	5.88	3.34	0.42
-138.02*	6.13	3.40	-0.05	0.48	5.82	3.32	0.41
-139	6.06	3.37	-0.05	0.47	5.77	3.30	0.40

Tableau 18 : O^{16} . Longueur de diffusion (valeur expérimentale b_{ex} = 5.65 fm[3]) et portée effective calculées en utilisant des fonctions d'onde radiales d'oscillateur harmonique (Tab. 2). Les valeurs de V_o marquées par * reproduisent l'état excité $1/2^+$ de O^{17} (Fig. 8).

FORCE	SANS ANTISYMETRISER AVEC 1s				ANTISYMETRISE AVEC 1s		
V_o (Mev)	b (fm)	r_e (fm)	$\langle 1s \mid \psi \rangle$	$\langle 2s \mid \psi \rangle$	b (fm)	r_e (fm)	$\langle 2s \mid \psi \rangle$
Serber							
-50	6.44	3.29	-0.06	0.36	6.09	3.20	0.25
-51	6.13	3.19	-0.06	0.27	5.82	3.10	0.16
-52	5.87	3.10	-0.06	0.18	5.58	3.01	0.07
-53	5.65	3.01	-0.06	0.10	5.38	2.93	- 0.007

Tableau 19 : O^{16} . Longueur de diffusion et portée effective calculées en utilisant des fonctions d'onde radiales de Wood-Saxon (Tab. 6).
La profondeur V_o = -53.09 Mev reproduit l'état excité $1/2^+$ de O^{17} (Fig. 8).

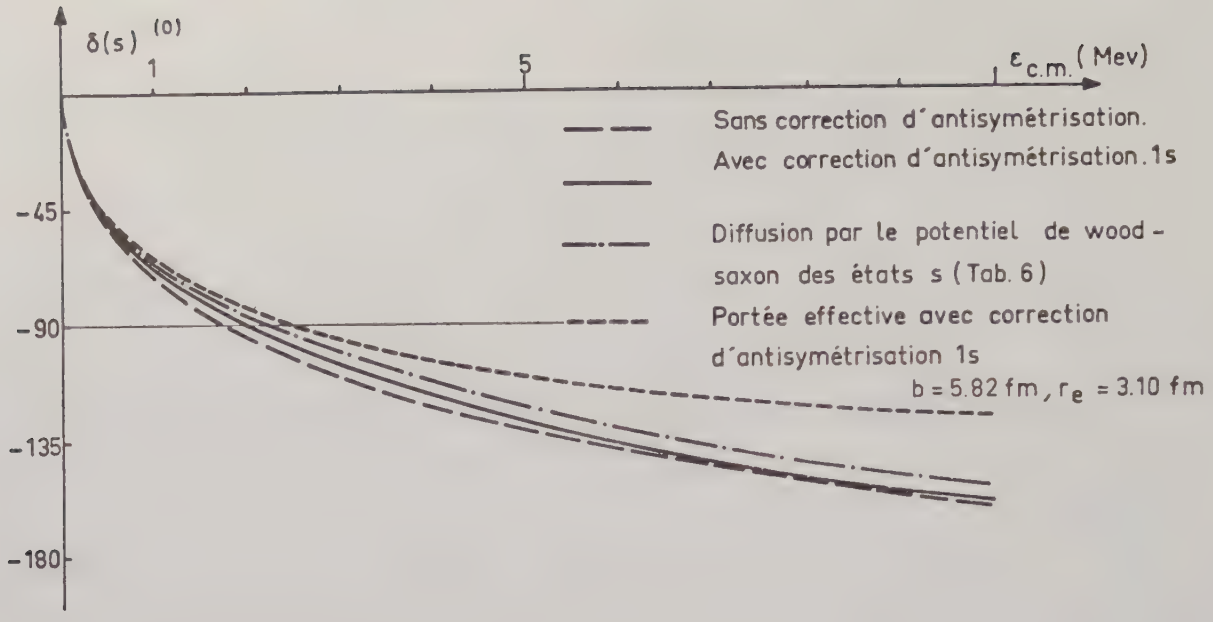


Figure 11 : O^{16}. Déphasages de l'onde s, calculés en utilisant des fonctions d'onde radiales de Wood-Saxon(Tab.6) et la force à deux corps de Serber de profondeur V_0 = -51 Mev.

Serber V_0 = -51 Mev		SANS ANTISYMETRISER		ANTISYMETRISE AVEC 1s	
$\varepsilon_{c.m.}$ (Mev)	$\delta(\upsilon_s)$ °	δ °	b = 6.13 fm r_e = 3.19 fm	δ °	b = 5.82 fm r_e = 3.10 fm
0.2	28.58	32.87	32.67	31.28	31.12
0.4	40.50	45.68	45.13	43.65	43.15
0.6	49.14	55.08	54.05	52.78	51.84
0.8	56.34	62.68	61.11	70.19	58.75
1	62.28	69.12	66.94	66.55	64.61
2	84.42	92.29	86.53	89.59	84.08
4	111.78	120.10	106.52	117.67	104.42
6	129.78	138.38	117.47	136.28	115.61
8	143.46	152.15	124.61	150.35	122.98
10	154.26	163.26	129.76	161.68	128.29

Tableau 20 : O^{16}. Déphasages de l'onde s calculés en utilisant des fonctions radiales de Wood-Saxon(Tab.6) et une interaction de Serber de profondeur -51 Mev . $\delta(\upsilon_s)$ est le déphasage correspondant au potentiel de Wood-Saxon des états s . Les valeurs de b et r_e définissent l'approximation de la portée effective .

(Fig. 9) et Wood-Saxon (Fig. 10). Dans ce dernier cas, comme pour le C^{12}, les deux fonctions sont pratiquement identiques.

Pour les profondeurs V_o ci-dessus, les longueurs de diffusion calculées (Tab. 18 et 19) sont très proches de la valeur expérimentale :

$$b_{ex} = 5.80 \text{ fm}^{[3]} .$$

Les profondeurs V_o qui reproduisent l'énergie de liaison expérimentale de O^{16},

$$E_\ell = -127.62 \text{ Mev}^{[30]} ,$$

sont indiquées dans le tableau 17.

L'allure des fonctions d'onde radiales de diffusion à énergie nulle, calculées sans terme correctif d'antisymétrisation et avec, est donnée (Fig. 9 et 10).

Les déphasages de l'onde s (Fig. 11 et Tab. 20) sont en bon accord avec les valeurs experimentales de Fowler et Cohn[33] ainsi qu'avec celles obtenues par une méthode de Hartree-Fock par C.B. Dover et Nguyen Van Giai[37].

IV.2.3. Résultats pour Ca^{40}.

Les énergies de particules indépendantes n'étant pas définies pour les états très liés dans le champ moyen du Ca^{40}, nous avons utilisé uniquement des fonctions radiales d'oscillateur harmonique (Tab. 2).

Les corrections d'antisymétrisation avec l'état 1s très lié, sont négligeables aussi bien sur la longueur de diffusion et la portée effective (Tab. 21), que sur le déphasage (Fig. 12).

En omettant les termes correctifs d'antisymétrisation, la composante de l'état individuel de diffusion $|\varphi_s\rangle$ sur l'état $|1s1/2\rangle$ est très faible (0.01), alors qu'elle est importante (0.5) sur l'état $|2s1/2\rangle$. Le terme correctif d'antisymétrisation avec ce dernier état est donc important. Son introduction diminue presque de moitié la longueur de diffusion et de 30% la portée effective. La correction sur le déphasage est extrémale au voisinage de 3 Mev et vaut alors 30^o.

Tableau 21 : Ca^{40} . Longueur de diffusion et portée effective calculées en utilisant des fonctions d'onde radiales d'oscillateur harmonique (Tab. 2). La valeur expérimentale de la longueur de diffusion est : $b_{ex} = 4.9$ fm [3].

FORCE	SANS ANTISYMETRISER				ANTISYMETRISE AVEC 1s			AN. AVEC 1s ET 2s	
V_o (Mev)	b (fm)	r_e (fm)	$\langle 1s\|\psi\rangle$	$\langle 2s\|\psi\rangle$	b (fm)	r_e (fm)	$\langle 2s\|\psi\rangle$	b (fm)	r_e (fm)
Serber									
-23	8.59	4.41	0.02	0.71	8.56	4.40	0.71	4.94	3.04
-24	7.71	4.14	0.01	0.62	7.71	4.14	0.62	4.91	3.02
-25	7.11	3.92	0.0003	0.55	7.11	3.92	0.55	4.88	2.99
I.G.E. 1									
-32	7.18	3.96	0.01	0.55	7.16	3.95	0.55	4.93	3.03
-33	6.81	3.81	0.009	0.51	6.80	3.81	0.50	4.91	3.01
-34	6.51	3.69	0.004	0.46	6.51	3.69	0.46	4.88	3.00
I.G.E. 2									
-36	6.64	3.75	0.01	0.48	6.63	3.75	0.47	4.92	3.02
-37	6.39	3.65	0.008	0.44	6.39	3.65	0.44	4.90	3.01
-38	6.18	3.55	0.004	0.40	6.18	3.55	0.40	4.88	2.99
I.G.E. 3									
-40	6.32	3.63	0.01	0.42	6.31	3.62	0.42	4.92	3.02
-41	6.14	3.54	0.01	0.39	6.13	3.54	0.39	4.90	3.01
-42	5.98	3.47	0.007	0.36	5.97	3.47	0.36	4.88	2.99

En introduisant les corrections d'antisymétrisation avec 1s et 2s, les déphasages de l'onde s que l'on obtient sont 15% plus grands en valeur absolue que ceux calculés par C.B. Dover et Nguyen Van Giai[37].

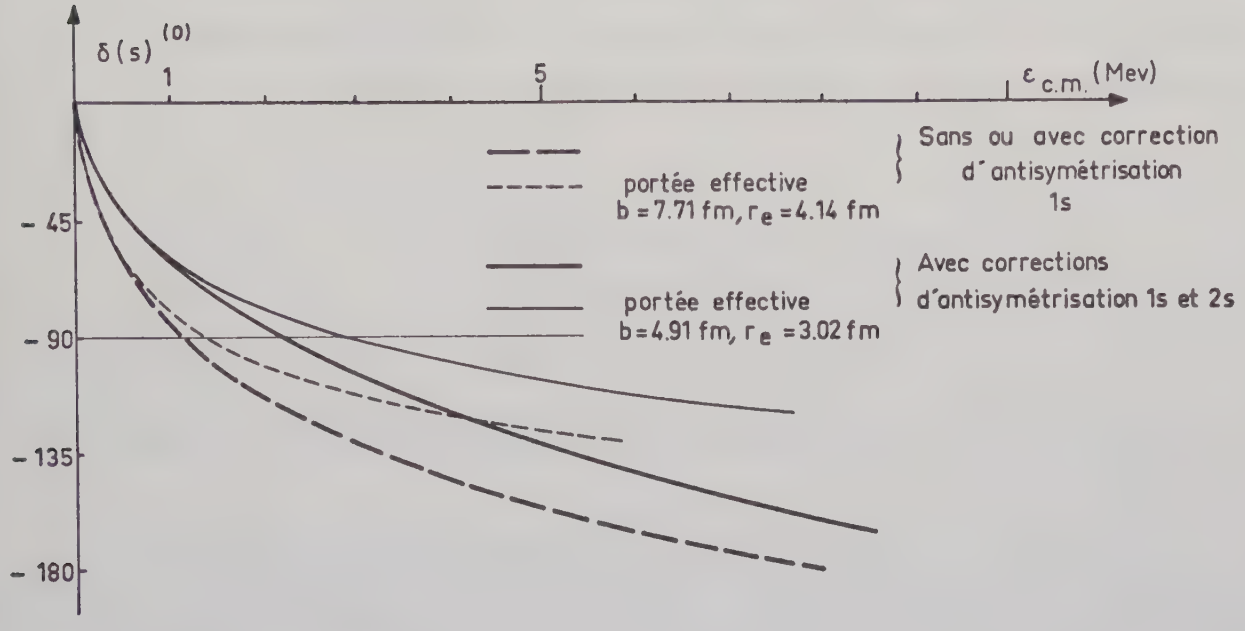


Figure 12 : Ca^{40}. Déphasages de l'onde s, calculés en utilisant des fonctions d'onde radiales d'oscillateur harmonique (Tab. 2) et une force à deux corps de Serber de profondeur V_o = -24 Mev.

IV.3. DISCUSSION DES RESULTATS POUR LES NOYAUX DE SPIN NON NUL.

Pour les noyaux de spin I non nul dans l'état fondamental, on doit considérer les deux voies de réaction $J = I \pm 1/2$ (III.1.1) non couplées par le hamiltonien du problème, invariant par rotation. On détermine alors les deux longueurs de diffusion $b_{\pm}$ ainsi que la longueur de diffusion cohérente A (III-3) et le terme de dépendance en spin B (III-4).

IV.3.1. Résultats pour C^{13}.

a) Voies de réaction et déterminations de V_o :

Le fondamental du C^{13} est un état $1/2^-$ que l'on identifie à la configuration $|\widetilde{C^{12}, 1p1/2}\rangle_n$. Par suite, les voies de réaction sont les suivantes :

J^π, T = $(0^-,1)$ et $(1^-,1)$ où la valeur 1 de l'isospin correspond à la présence de deux neutrons au dessus du coeur fermé de C^{12}.

En négligeant les excitations particule-trou du coeur, les états à 14 nucléons liés qui peuvent se coupler aux voies de réaction précédentes, correspondent aux configurations de couche externe suivantes :

$J^\pi = 0^-$, T = 1	$J^\pi = 1^-$, T = 1
1p1/2, 2s1/2	1p1/2, 2s1/2
	1p1/2, 1d3/2.

En fait, l'état 1d3/2 n'intervient pas car il n'est pas lié dans le champ moyen du C^{12} (Fig. 2).

Les configurations correspondant aux couches externes (1p1/2, 2s1/2)01 et (1p1/2,2s1/2)11 sont respectivement identifiées aux états excités 0^- et 1^- du C^{14}, dont les énergies, rapportées au fondamental du C^{13} plus un neutron à l'infini sont (Fig. 13) : $\varepsilon_{0^-} = -1.276$ Mev, $\varepsilon_{1^-} = -2.086$ Mev.

Pour chaque interaction à deux corps, on détermine les profondeurs V_o qui reproduisent les deux états liés précédents ; les deux valeurs ainsi obtenues sont très voisines. L'ensemble de ces couples, calculés en utilisant les fonctions d'onde radiales d'un oscillateur harmonique de même paramètre α que celui adopté pour le C^{12} (Tab. 2), figure dans le tableau 22. Dans le cas de fonctions d'onde radiales de Wood-Saxon et d'une interaction à deux corps de Serber, on obtient respectivement :

$$V_o(1^-) = -59.85 \text{ Mev} \quad \text{et} \quad V_o(0^-) = -59.93 \text{ Mev.}$$

Comme pour les noyaux magiques, ces profondeurs sont du même ordre de grandeur que celles qui reproduisent l'énergie de liaison expérimentale, $E_\ell = -97.109$ Mev [30] , du C^{13}. Ainsi dans le cas de fonctions d'onde radiales

d'oscillateur harmonique, on trouve V_o = -72.4 Mev pour l'interaction de Serber et -86.9 Mev pour I.G.E. 1.

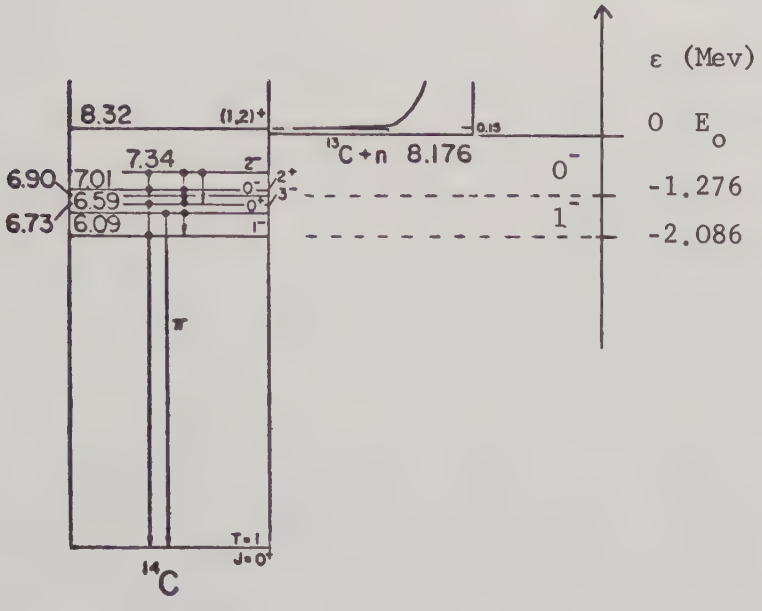


Figure 13 : Energies de liaison ε_0- et ε_1- des états excités 0^- et 1^- du C^{14}, rapportées au fondamental du C^{13} plus un neutron à l'infini[18].

b) Longueurs de diffusion :

Seule la longueur de diffusion cohérente A est actuellement connue expérimentalement et vaut :

$$A_{ex} = 6.0 \text{ fm}^{[3]}.$$

La mesure du paramètre $B = (b_+ - b_-)$ est entreprise[41], mais elle est délicate en raison entre autres, de la faible abondance naturelle (1.11) du C^{13}.

Pour les valeurs de V_o qui reproduisent les états excités 0^- et 1^- du C^{14}, on obtient en antisymétrisant avec l'état 1s, la valeur expérimentale de A à moins de 5% près (Tab. 22 et 23). Ces résultats montrent que le même potentiel, calculé à partir d'interactions phénoménologiques à deux corps, décrit correctement, à la fois l'état lié 2s dans le C^{14}, et l'état de diffusion à énergie nulle sur le C^{13}.

On notera que les valeurs de V_o qui permettent d'obtenir la longueur de diffusion cohérente A, sont également celles qui reproduisent la longueur de diffusion du C^{12} (IV.2.1).

Tableau 22 : C^{13} . Longueurs de diffusion et portées effectives calculées en utilisant des fonctions d'onde radiales d'oscillateur harmonique (Tab. 2). Les indices $^{+}_{-}$ correspondent aux voies de réaction J = 0 (-) et J = 1 (+). Les valeurs de V_o affectées de $(J^{\pm})$, reproduisent l'état excité correspondant du C^{14} (Fig. 13).

FORCE	SANS ANTISYMETRISER AVEC 1s						ANTISYMETRISE AVEC 1s					
V_o (Mev)	b_- (fm)	b_+ (fm)	A (fm)	B (fm)	r_{e-} (fm)	r_{e+} (fm)	b_- (fm)	b_+ (fm)	A (fm)	B (fm)	r_{e-} (fm)	r_{e+} (fm)
Serber												
-62.1 (1^-)	8.35	6.80	7.19	-1.55	3.82	3.44	7.21	6.14	6.41	-1.07	3.55	3.24
-62.4 (0^-)	8.18	6.71	7.08	-1.47	3.78	3.42	7.09	6.07	6.32	-1.02	3.52	3.22
-64	7.46	6.30	6.59	-1.16	3.61	3.29	6.55	5.74	5.94	-0.81	3.37	3.10
I.G.E. 1												
-87.0 (1^-)	9.58	6.89	7.56	-2.69	4.03	3.48	7.86	6.17	6.59	-1.69	3.73	3.28
-89.5 (0^-)	8.37	6.41	6.90	-1.96	3.82	3.34	7.09	5.81	6.13	-1.28	3.54	3.16
-90	8.18	6.33	6.79	-1.85	3.78	3.31	6.96	5.75	6.05	-1.21	3.51	3.13
I.G.E. 2												
-95.6 (1^-)	10.27	6.96	7.79	-3.31	4.13	3.50	8.13	6.20	6.68	-1.93	3.79	3.30
-99.1 (0^-)	8.53	6.36	6.90	-2.17	3.85	3.33	7.11	5.76	6.10	-1.35	3.56	3.15
-100	8.21	6.23	6.73	-1.97	3.79	3.29	6.91	5.67	5.98	-1.24	3.51	3.12
I.G.E. 3												
-105.3(1^-)	11.34	7.05	8.12	-4.29	4.26	3.53	8.48	6.23	6.79	-2.25	3.87	3.32
-110.2(0^-)	8.73	6.30	6.91	-2.43	3.89	3.32	7.13	5.70	6.06	-1.42	3.58	3.14
-111	8.46	6.21	6.77	-2.26	3.84	3.29	6.97	5.63	5.97	-1.34	3.54	3.12
Rosenfeld												
-156.9(1^-)	15.76	7.33	9.44	-8.43	4.57	3.61	9.16	6.27	6.99	-2.89	4.02	3.37
-167.0(0^-)	9.53	6.28	7.10	-3.25	4.00	3.33	7.17	5.63	6.01	-1.54	3.62	3.16
-168	9.24	6.21	6.97	-3.03	3.96	3.31	7.04	5.58	5.95	-1.46	3.59	3.14

Serber		SANS ANTISYMETRISER AVEC 1s						ANTISYMETRISE AVEC 1s					
	$V_\bullet$ (Mev)	b_- (fm)	b_+ (fm)	A (fm)	B (fm)	r_{e-} (fm)	r_{e+} (fm)	b_- (fm)	b_+ (fm)	A (fm)	B (fm)	r_{e-} (fm)	r_{e+} (fm)
C^{13}	-59	8.42	6.81	7.21	-1.61	3.72	3.38	7.40	6.30	6.57	-1.11	3.53	3.25
	-60	7.83	6.50	6.83	-1.33	3.60	3.28	6.95	6.03	6.26	-0.92	3.42	3.16
	-61	7.36	6.23	6.51	-1.13	3.49	3.20	6.58	5.80	6.00	-0.79	3.32	3.08
	-62	6.96	5.99	6.24	-0.97	3.39	3.12	6.28	5.60	5.77	-0.68	3.23	3.00
	-63	6.63	5.79	6.00	-0.85	3.30	3.05	6.02	5.42	5.57	-0.60	3.14	2.94
O^{17}	-50	5.63	6.54	6.16	0.30	3.04	3.33	5.44	6.15	5.85	0.24	2.97	3.23
	-51	5.44	6.22	5.89	0.26	2.96	3.23	5.25	5.87	5.61	0.21	2.90	3.13

Tableau 23 : C^{13} et O^{17} . Longueurs de diffusion et portées effectives calculées en utilisant des fonctions d'onde radiales de Wood-Saxon (Tab. 5 et 7). les indices ± correspondent aux voies de réaction $J = I \pm 1/2$.

- Pour C^{13} , les profondeurs -59.85 Mev et -59.93 Mev reproduisent respectivement les états excités 1^- et 0^- du C^{14} (Fig. 13).
  La valeur expérimentale de A est : $A_{ex} = 6.0$ fm [3] .
- Pour O^{17} , la profondeur -51.83 Mev reproduit l'état excité 3^+ de O^{18} (Fig. 14).
  La valeur expérimentale de A est : $A_{ex} = 5.78$ fm [3].

Les valeurs prédites du paramètre B sont négatives et varient entre -0.8 fm et -1.5 fm, pour les différentes forces à deux corps et la profondeur V_o qui reproduit la longueur de diffusion cohérente.

La correction d'antisymétrisation avec l'état 1s a pour effet de réduire la valeur de A de 10 à 15% suivant la force à deux corps utilisée. Cette diminution affecte plus b_- que b_+, il en résulte une augmentation de la valeur de B variant de 30 à 50%.

c) Les résultats précédents peuvent être obtenus qualitativement.

En effet, nous avons vu que le même potentiel, calculé à partir de l'interaction à deux corps, détermine à la fois l'état 2s lié et l'état individuel de diffusion à énergie nulle. Les informations sur les potentiels, extraites des spectres des états liés cible plus neutron, sont donc valables pour la diffusion à basse énergie.

Ainsi, l'état excité 1^- du C^{14} étant plus bas en énergie que l'état 0^-, le potentiel de diffusion dans la voie J = 1 doit être plus attractif que dans la voie J = 0. Pour des longueurs de diffusion de même signe, b_+ est alors inféreur à b_- et B est négatif ; c'est bien le résultat que nous avons obtenu.

Vérifions que les interactions à deux corps utilisées reproduisent qualitativement l'ordre des états excités 1^- et 0^- du C^{14}.

L'énergie d'interaction d'un neutron dans l'état 2s avec les nucléons du C^{13} dans son état fondamental, est la somme de deux termes : l'un dû aux interactions avec les nucléons du coeur de C^{12} et l'autre avec le neutron dans la couche externe 1p1/2. Seul ce dernier terme est différent dans les voies J=0 et J=1 et correspond aux éléments de matrice diagonaux de l'interaction à deux corps sur les configurations $|(\widetilde{1p1/2,2s1/2})01\rangle_n$ et $|(\widetilde{1p1/2,2s1/2})11\rangle_n$. Les valeurs de ces éléments de matrice sont donnés dans le tableau 24 et correspondent bien, pour chaque force, à un état 1^- plus lié que l'état 0^-.

V_o = -50 Mev	$\langle$(1p1/2,2s1/2) 01$\rangle$	$\langle$(1p1/2,2s1/2) 11$\rangle$
Serber	0.	-0.698
I.G.E. 1	0.358	-0.320
I.G.E. 2	0.357	-0.319
I.G.E. 3	0.357	-0.319
Rosenfeld	0.369	-0.166

Tableau 24 : C^{13}. Eléments de matrice diagonaux de la force centrale à deux corps, calculés avec des fonctions d'onde radiales de Wood-Saxon (Tab. 5)

IV.3.2. Résultats pour O^{17}.

La discussion des résultats obtenus pour O^{17} est analogue à la précédente.

a) Le fondamental de O^{17} est un état $5/2^+$ que l'on identifie à la configuration $|O^{16}, \widetilde{1d5/2}\rangle_n$. Les deux voies de réaction considérées sont les suivantes :

$$J^\pi,\ T = (2^+,1) \quad \text{et} \quad (3^+,1).$$

En négligeant toujours les excitations particule-trou du coeur de O^{16}, les configurations à 18 nucléons liés qui peuvent se coupler aux voies précédentes sont :

$J^\pi = 2^+,\ T = 1$	$J^\pi = 3^+,\ T = 1$
$(1d5/2)^2$	
(1d5/2 , 2s1/2)	(1d5/2 , 2s1/2)
(1d5/2 , 1d3/2)	(1d5/2 , 1d3/2)
$(1d3/2)^2$	

Seules les configurations soulignées sont prises en compte dans nos calculs. Les autres nous amèneraient à résoudre, dans le cadre du modèle (II.4.2), les équations couplées (II-58) incluant les ondes d de diffusion.

La configuration correspondant à la couche externe $|(\widetilde{1d5/2 , 2s1/2})31\rangle_n$ est identifiée à l'état excité 3^+ de O^{18}, d'énergie rapportée au fondamental de O^{17} plus un neutron à l'infini (Fig. 14) :

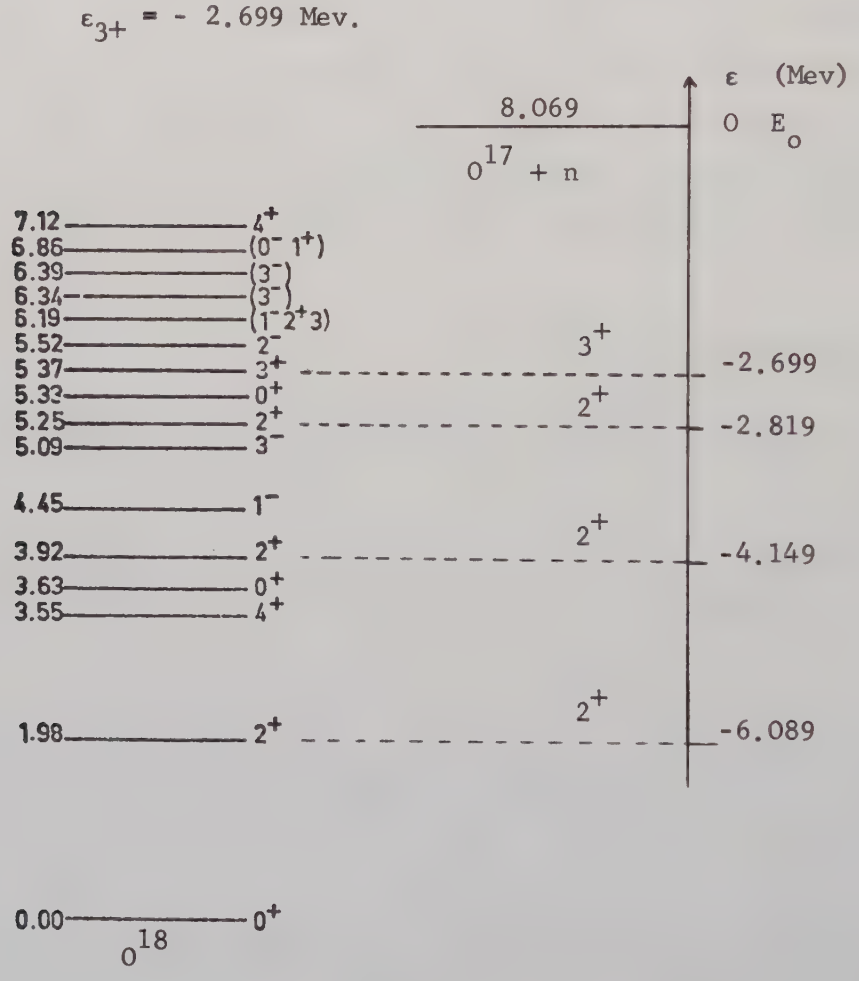


Figure 14 : Energies de liaison des états excités 2^+ et 3^+ de O^{18}, rapportées au fondamental de O^{17} plus un neutron à l'infini[38,39].

Tableau 25 : O^{17} . Longueurs de diffusion et portées effectives calculées en utilisant des fonctions d'onde radiales d'oscillateur harmonique (Tab. 2). Les indices $^{+}_{-}$ correspondent aux voies de réaction J = 2 (-) et J = 3 (+) . Les valeurs de V_o affectées de (3^+), reproduisent cet état excité de O^{18} (Fig. 14).

FORCE	SANS ANTISYMETRISER AVEC 1s						ANTISYMETRISE AVEC 1s					
V_o (Mev)	b_- (fm)	b_+ (fm)	A (fm)	B (fm)	r_{e-} (fm)	r_{e+} (fm)	b_- (fm)	b_+ (fm)	A (fm)	B (fm)	r_{e-} (fm)	r_{e+} (fm)
Serber												
-54	5.90	6.73	6.38	0.28	3.25	3.53	5.63	6.22	5.98	0.20	3.15	3.37
-55.5 (3^+)	5.65	6.34	6.05	0.23	3.14	3.40	5.41	5.90	5.70	0.16	3.05	3.25
I.G.E. 1												
-75	5.75	6.73	6.32	0.32	3.21	3.55	5.54	6.26	5.96	0.24	3.14	3.42
-77.1 (3^+)	5.53	6.35	6.01	0.27	3.12	3.42	5.35	5.96	5.70	0.20	3.05	3.30
I.G.E. 2												
-83	5.68	6.68	6.27	0.33	3.19	3.54	5.50	6.24	5.93	0.25	3.13	3.42
-85.1 (3^+)	5.50	6.35	6.00	0.28	3.11	3.43	5.33	5.97	5.71	0.21	3.06	3.32
I.G.E. 3												
-92	5.62	6.67	6.24	0.35	3.18	3.55	5.46	6.24	5.91	0.26	3.13	3.44
-94.1 (3^+)	5.47	6.38	6.00	0.30	3.11	3.45	5.32	6.01	5.72	0.23	3.07	3.35
Rosenfeld												
-136	5.60	6.72	6.25	0.37	3.20	3.59	5.46	6.28	5.94	0.27	3.17	3.49
-139.0(3^+)	5.47	6.44	6.04	0.33	3.15	3.50	5.35	6.07	5.77	0.24	3.11	3.42

Une diagonalisation[40] dans un espace de configurations incluant les excitations particule-trou du coeur, montre que cet état 3^+ a une composante importante (50%) sur la configuration considérée, les autres composantes se divisant en 20% pour la configuration $[(1p3/2)^{-2}, (1d5/2)^3, 2s1/2]$ et le reste en un grand nombre de petites composantes.

Les profondeurs V_o qui reproduisent cet état 3^+, en utilisant les fonctions d'onde radiales d'un oscillateur harmonique ayant le même paramètre α que celui adopté pour O^{16} (Tab. 2), sont données dans le tableau 25. Pour une interaction de Serber avec des fonctions d'onde radiales de Wood-Saxon, cette profondeur est $V_o = -51.83$ Mev.

Nous n'avons pas déterminé V_o pour la voie 2^+ car les trois premiers états excités 2^+ de O^{18} (Fig. 14) ne s'identifient pas simplement à la configuration correspondant à la couche externe $|\widetilde{(1d5/2\ 2s1/2)}21\rangle_n$. La diagonalisation mentionnée précédemment montre que ces états présentent deux composantes dominantes : $(1d5/2)^2$ et $(1d5/2, 2s1/2)$.

b) Comme pour le C^{13}, seule la longueur de diffusion cohérente A est connue expérimentalement et vaut :

$$A_{ex} = 5.78 \text{ fm}[3].$$

La mesure de B est entreprise[41], mais sera encore plus délicate que dans le cas du C^{13}, l'abondance naturelle de O^{18} étant très faible (0.087).

Nous prédisons une valeur de B positive et variant de 0.16 fm à 0.24 fm pour les différentes forces à deux corps utilisées et avec dans chaque cas, la profondeur qui reproduit la valeur expérimentale de A (Tab. 23 et 25). Cette profondeur est identique à celle qui permet d'obtenir la longueur de diffusion de O^{16} (IV.2.2).

On notera que pour une valeur donnée de $b_+ - b_-$, la valeur absolue de B est d'autant plus petite que le spin I de la cible est élevé (III-4). Ainsi dans le cas de O^{17} :

$$B = \frac{1}{3}(b_+ - b_-) \quad ,$$

au lieu de $b_+ - b_-$ dans celui du C^{13}.

c) Le signe positif de B que nous avons obtenu, est en accord avec la prédiction qualitative, faite à partir de l'ordre des états excités 2^+ et 3^+ de O^{18}. En effet, les états 2^+ étant plus liés que l'état 3^+, le potentiel de diffusion dans la voie J = 2 doit être plus attractif que dans la voie J = 3, et par suite, pour des longueurs de diffusion de même signe, b_- doit être inférieur à b_+.

Nous vérifions que les interactions à deux corps utilisées reproduisent qualitativement l'ordre des états excités 2^+ et 3^+. Pour cela on a calculé les éléments de matrice d'interaction résiduelle sur les configurations $|\widetilde{(1d5/2,2s1/2)}21\rangle_n$ et $|\widetilde{(1d5/2,\ 2s1/2)}31\rangle_n$ (Tab. 26). On obtient bien pour J = 2 des énergies plus basses que pour J = 3.

V_o = -50 Mev	$\langle$(1d5/2,2s1/2)21$\rangle$	$\langle$(1d5/2,2s1/2)31$\rangle$
Serber	-1.266	0
I.G.E. 1	-0.869	0.360
I.G.E. 2	-0.866	0.359
I.G.E. 3	-0.867	0.359
Rosenfeld	-0.599	0.371

Tableau 26 : O^{17}. Eléments de matrice diagonaux de la force centrale à deux corps, calculés avec des fonctions radiales de Wood-Saxon (Tab. 7).

CHAPITRE V

ANTISYMETRISATION DANS LE CAS D'UN MELANGE DE CONFIGURATIONS

Quand la description de l'état fondamental de la cible nécessite l'introduction d'un mélange de configurations, dont certaines seulement incluent un état lié particulier à un nucléon de même nombre quantique $i = (\ell, j)$ que l'état individuel de diffusion, le traitement de l'antisymétrisation ne peut plus se faire dans le cadre du modèle simple décrit en (II.4.2). On doit alors résoudre le système d'équations (II-42) couplant la configuration à N-1 nucléons liés et un dans le continu avec celles à N nucléons liés. Ces états liés correspondent à une description approchée des configurations de voies fermées, pour lesquelles on néglige les composantes dans le continu.

Nous traitons ce problème dans le cas de la diffusion de neutrons thermiques sur le F^{19}. Les états de ce noyau sont décrits par un mélange de configurations où l'état 2s est absent de certaines d'entre elles. Cependant, l'espace de configurations nécessaire pour obtenir un accord satisfaisant avec les spectres et les taux de transition expérimentaux, reste de dimension convenable pour permettre des calculs pratiques.

Le choix de ce noyau est justifié par l'existence de mesures récentes et précises[4] de la longueur de diffusion cohérente A et du terme de dépendance en spin B. Les valeurs expérimentales sont :

$$\begin{aligned} A &= 5.74 \pm 0.03 \text{ fm} \qquad & b_- &= 5.841 \text{ fm} \\ B &= -0.135 \pm 0.02 \text{ fm} \qquad & b_+ &= 5.704 \text{ fm.} \end{aligned} \tag{V-1}$$

Dans un premier paragraphe, nous négligerons le couplage avec les états liés à N=20 nucléons et introduirons le terme correctif d'antisymétrisation avec l'état 2s comme s'il était totalement occupé dans la cible. Le couplage avec les états liés à 20 nucléons sera étudié dans le deuxième paragraphe.

V.1. APPROXIMATION OBTENUE EN NEGLIGEANT LE COUPLAGE AVEC LES ETATS LIES A N = 20 NUCLEONS.

V.1.1. Résultats dans cette approximation.

a) Voies de réaction et déterminations de V_o :

Le fondamental de la cible est un état de spin et d'isospin 1/2, 1/2, que l'on décrit (III.4.1b) par un mélange de configurations dans la couche 2s-1d (Tab. 11), obtenu par diagonalisation dans le sous-espace des états liés à 19 nucléons, de la même interaction à deux corps que celle utilisée dans le problème de diffusion.

Les voies de réaction considérées sont $J^\pi T = (0^+,1)$ et $(1^+,1)$.

Dans ce paragraphe, on utilise la première interprétation de l'interaction à deux corps (III.3.1), à savoir : les nucléons interagissent uniquement par l'intermédiaire de la force à deux corps : $V = V^{(2)}$.

La méthode utilisée au chapitre IV pour déterminer la profondeur V_o de cette force, qui consiste à reproduire un état excité du noyau cible plus neutron, ne s'applique plus. En effet, les états excités du F^{20} (Fig. 15) ne s'identifient pas simplement à la configuration $|F^{19}\tilde{,}2s1/2\rangle_n$.

Les résultats présentés dans les tableaux 27 et 28 correspondent à la profondeur qui donne une valeur de A proche de la valeur expérimentale, quand on introduit le terme correctif d'antisymétrisation avec l'état 1s, et pour des fonctions d'onde radiales de diffusion présentant deux noeuds, origine exclue (III.3.3b).

On notera que ces profondeurs sont plus faibles que celles utilisées dans la prédiagonalisation (III.4.1b) pour reproduire l'énergie de liaison expérimentale du fondamental du F^{19}, l'interprétation de la force effective étant différente dans ces deux calculs.

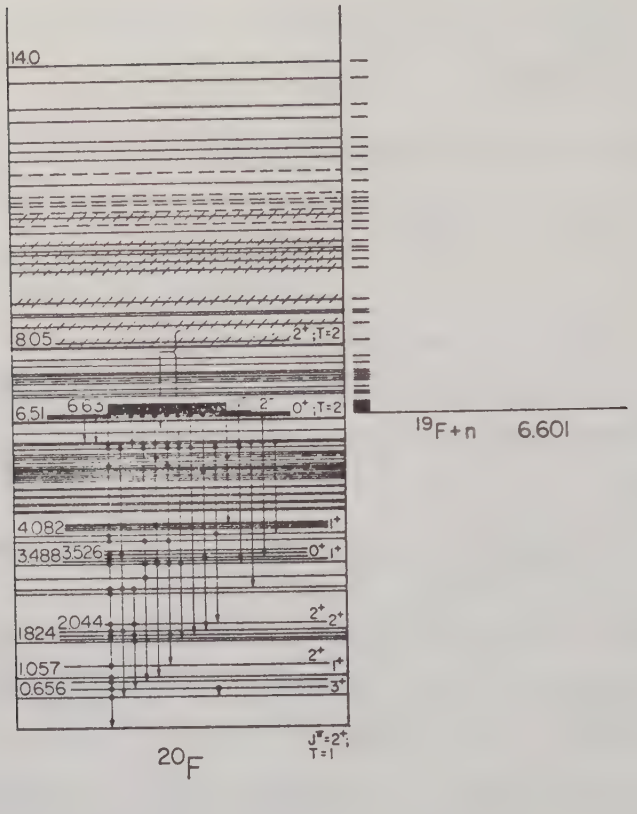


Figure 15 : Spectre expérimental du F^{20}[38].

b) Longueurs de diffusion :

Les résultats obtenus pour différentes forces, en utilisant des fonctions d'onde radiales d'oscillateur harmonique, sont donnés dans le tableau 27. Le mélange de configurations III (Tab. 11) de la cible de F^{19} est obtenu par diagonalisation du hamiltonien vrai à 19 nucléons avec la force de Serber et des fonctions d'onde radiales d'oscillateur harmonique. Les résultats obtenus en utilisant des fonctions d'onde radiales de Wood-Saxon, à la fois pour la prédiagonalisation du F^{19} (IV Tab. 11) et pour le problème de diffusion figurent dans le tableau 28.

Les premiers calculs effectués en collaboration avec V. Gillet[32], négligeaient tous les termes correctifs d'antisymétrisation avec les états 1s et 2s, en outre, la cible était décrite par le mélange de configurations N°1 (Tab. 11), ne contenant pas l'état 1d3/2.

- Si on néglige les termes correctifs d'antisymétrisation avec les états 1s et 2s, l'état individuel de diffusion obtenu présente des composantes non nulles sur ces états s liés. Avec des fonctions d'onde radiales

FORCE V_o (Mev)		b_- (fm)	b_+ (fm)	A (fm)	B (fm)	r_{e-} (fm)	r_{e+} (fm)
Serber	1-	6.06	6.14	6.12	0.083	3.35	3.38
-49	2-	5.69	5.78	5.76	0.088	3.20	3.24
	3-	4.55	4.56	4.56	0.008	2.77	2.78
I.G.E. 1	1-	6.05	6.05	6.05	-0.001	3.36	3.37
-66	2-	5.73	5.74	5.74	0.009	3.24	3.25
	3-	4.59	4.61	4.60	0.02	2.80	2.81
I.G.E. 2	1-	6.33	6.25	6.27	-0.09	3.49	3.46
-70	2-	5.99	5.93	5.94	-0.06	3.37	3.34
	3-	4.64	4.64	4.64	-10^{-6}	2.84	2.84
Rosenfeld	1-	6.54	5.87	6.04	-0.66	3.60	3.35
-110	2-	6.20	5.66	5.80	-0.54	3.50	3.28
	3-	4.76	4.68	4.70	-0.08	2.93	2.87

Tableau 27 : F^{19} . Longueurs de diffusion et portées effectives calculées en utilisant des fonctions d'onde radiales d'oscillateur harmonique (Tab. 2). Le F^{19} est décrit par le mélange de configurations III (Tab. 11).
Les indices $\pm$ correspondent aux voies de réaction J = 0 (-) et J = 1 (+).
Les valeurs expérimentales de A et B sont[4] :

$A = 5.74 \pm 0.03$ fm $B = -0.135 \pm 0.02$ fm.

Pour chaque force avec la profondeur V_o, les trois lignes de résultats correspondent aux approximations suivantes :

1- sans correction d'antisymétrisation,

2- avec la correction pour l'état 1s,

3- avec les corrections pour les états 1s et 2s.

d'oscillateur harmonique, celles-ci sont, dans les deux voies de réaction 0^+ et 1^+, de l'ordre de -0.08 sur l'état 1s et de 0.45 sur l'état 2s. La composante sur l'état 2s est plus faible (0.23) dans le cas de fonctions d'onde radiales de Wood-Saxon.

La correction d'antisymétrisation avec l'état 1s a pour effet de réduire les longueurs de diffusion dans les deux voies de 5 à 7% ; cela pour toutes les forces à deux corps utilisées, aussi bien avec des fonctions d'onde radiales d'oscillateur harmonique que de Wood-Saxon.

Nous introduisons le terme correctif d'antisymétrisation avec l'état 2s comme si celui-ci était totalement occupé dans la cible. On néglige ainsi tous les états liés à 20 nucléons que l'on peut construire avec l'état 2s. Quand on utilise des fonctions d'onde radiales d'oscillateur harmonique, l'effet de ce terme correctif d'antisymétrisation est très important et diminue les longueurs de diffusion de 25 à 30% suivant les forces utilisées (Tab. 27). Nous avons déjà obtenu un tel résultat pour le Ca^{40} (IV.2.3). Il est dû à la grande différence entre le potentiel à un corps non borné d'oscillateur harmonique et le potentiel borné à grande distance, créé par les forces à deux corps et vu par le neutron incident. L'effet de cette correction serait nul si le même potentiel définissait l'état lié 2s et l'état individuel de diffusion. Dans le cas de fonctions d'onde radiales de Wood-Saxon, l'effet de cette correction sur les longueurs de diffusion est plus faible (1%). Cela correspond au fait déjà observé pour les noyaux magiques et voisins étudiés au chapitre IV, que l'état lié 2s du potentiel de Wood-Saxon est peu différent de celui du potentiel vu par le neutron incident. On comprend alors que la composante de l'état individuel de diffusion sur l'état 2s soit faible (0.14), quand on néglige cette correction d'antisymétrisation.

- La discussion des résultats en fonction des paramètres de mélange de la force à deux corps (Tab. 9) est peu probante étant donnée la faible valeur absolue de B. Cependant, on note une diminution de B, passant d'une valeur positive à une valeur négative, quand on utilise successivement les forces de Serber, I.G.E. 1,2,3 et Rosenfeld. Pour ces quatre dernières interactions en particulier, cela correspond essentiellement à une diminution de la valeur du paramètre $V^{S=0\ T=0}$ de 0.8 à -1.77.

FORCE V_o (Mev)		b_- (fm)	b_+ (fm)	A (fm)	B (fm)	r_{e-} (fm)	r_{e+} (fm)
Serber	1-	6.35	6.40	6.39	0.05	3.34	3.36
-45	2-	6.06	6.12	6.11	0.07	3.24	3.27
	3-	5.88	5.91	5.90	0.03	3.26	3.28
	1-	6.06	6.10	6.09	0.04	3.23	3.25
-46	2-	5.79	5.85	5.83	0.06	3.14	3.16
	3-	5.72	5.76	5.75	0.04	3.16	3.18
	1-	5.81	5.85	5.84	0.04	3.13	3.15
-47	2-	5.56	5.61	5.60	0.05	3.04	3.07
	3-	5.55	5.59	5.58	0.04	3.05	3.08

Tableau 28 : F^{19} . Longueurs de diffusion et portées effectives calculées en utilisant des fonctions d'onde radiales de Wood-Saxon (Tab. 8). Le F^{19} est décrit par le mélange de configurations IV (Tab. 11). Voir légende du tableau 27.

La valeur de B obtenue avec la force de Serber est de signe opposé au résultat expérimental [4], et sa valeur absolue est deux à trois fois plus faible. En fait, plus que leurs valeurs individuelles, c'est la comparaison des résultats dans les différentes approximations qui est significative. Nous verrons en effet, au paragraphe suivant, que la valeur de B et en particulier son signe, dépendent beaucoup du couplage avec les états à 20 nucléons liés.

La sensibilité des résultats à la profondeur V_o de l'interaction à deux corps apparait dans le tableau 28 pour la force de Serber. Une diminution de la profondeur de 2 Mev, correspondant à un potentiel plus attractif diminue les longueurs de diffusion de 6%.

- Les résultats obtenus en utilisant les trois mélanges de configurations II, III et IV (Tab. 11) pour décrire le fondamental du F^{19} sont très peu différents et reproduisent mal la valeur mesurée de B. Par contre, ceux obtenus en utilisant le mélange de configurations I [31], avec force de Serber (V_o = -49 Mev) et fonctions d'onde radiales d'oscillateur harmonique en excluant l'état 1d3/2 dans la description du fondamental du F^{19}, et incluant le terme correctif d'antisymétrisation avec 1s, correspondent à une valeur de B (-0.148 fm) proche de la valeur expérimentale (V-1). Cependant ce résultat est fortuit car, d'une part les calculs dans le modèle des couches montrent l'importance de l'état 1d3/2 dans la description du F^{19}, et d'autre part nous verrons au paragraphe suivant que tous les résultats précédents sont très sensibles au couplage avec les états liés à 20 nucléons.

V.1.2. Prédiction dans un modèle simple, du rôle joué par le couplage avec les états liés à N nucléons.

La description de la situation physique est intermédiaire entre les deux dernières approximations sur l'antisymétrisation, à savoir : introduire le terme correctif d'antisymétrisation avec l'état 1s totalement occupé dans le coeur de O^{16}, ou introduire simultanément les termes correctifs d'antisymétrisation avec les états 1s et 2s, comme si ce dernier était totalement occupé dans la cible. Pour tenir compte de l'occupation partielle de l'état 2s dans le F^{19}, nous devons introduire les états à N = 20 nucléons contenant cet état 2s ; c'est ce que nous ferons au paragraphe suivant.

Cependant, sans résoudre exactement ce problème, nous pouvons avoir une idée des corrections que cela introduira sur les longueurs de diffusion, en particulier de l'importance inégale de ces corrections suivant les voies : J = 0 ou J = 1.

Pour cela, considérons le modèle simple où le seul état lié à 20 nucléons introduit est obtenu par antisymétrisation, couplage et normalisation du fondamental du F^{19} avec l'état 2s. La construction explicite de cet état est détaillée en (D.2.3b2). La norme n (Tab. 29) de cette configuration liée donne une idée de l'importance des contraintes introduites par le principe d'exclusion.

Mélanges de configurations décrivant le fondamental du F^{19}.	n	
	J = 0	J = 1
2s1/2 n'est pas occupé	1	1
II A. Zuker[28]	0.846	0.663
IV (diagonalisation)	0.911	0.694
2s1/2 est totalement occupé	0	0

Tableau 29 : Norme n :

$$n = {}_{J,T=1}\left(\underset{n}{\leq} e(\widetilde{F^{19}})|<2s\,1/2|\right) \mathcal{A}(3,1)\left(|e(\widetilde{F^{19}})\underset{n}{\geq}|2s\,1/2>\right)_{J,T=1}$$

de la configuration à quatre nucléons décrivant la couche externe de l'état modèle à 20 nucléons liés, obtenu en antisymétrisant le fondamental du F^{19} (Tab. 11) avec l'état individuel 2s.

En effet, dans le cas fictif où l'état 2s n'est pas occupé dans le F^{19}, n vaut 1 et l'antisymétrisation peut être étudiée dans le cadre du modèle (II.4.2) en introduisant uniquement le terme correctif d'antisymétrisation avec 1s. Si l'état 2s est totalement occupé dans la cible, la configuration liée précédente à 20 nucléons est exclue par le principe de Pauli, et l'anti-

symétrisation peut encore être traitée dans le cadre du modèle (II.4.2) en introduisant les termes correctifs d'antisymétrisation avec 1s et 2s. Pour les mélanges de configurations II et IV (Tab. 11) décrivant le F^{19}, les valeurs de la norme (Tab. 29) sont plus grandes dans la voie J = 0 que dans la voie J = 1. On en déduit que dans ce modèle, les corrections d'antisymétrisation seront plus importantes pour J = 1 que pour J = 0.

C'est effectivement ce que nous obtiendrons (Tab. 33 et 34) en résolvant les équations tenant compte du couplage avec ce seul état quasi-lié. Alors que les termes correctifs d'antisymétrisation considérés jusque là (uniquement avec 1s ou simultanément avec 1s et 2s) avaient pour effet de diminuer de façon semblable les longueurs de diffusion $b_{\pm}$, nous obtiendrons une réduction plus importante pour b_+ que pour b_-, entrainant pour le paramètre B, égal à $b_+ - b_-$, un changement de signe.

V.2. ETUDE DU COUPLAGE AVEC LES ETATS LIES A N NUCLEONS.

V.2.1. Résolution des équations.

a) Espace de configurations.

Le traitement correct de l'antisymétrisation dans le cas d'un mélange de configurations où l'état 2s est partiellement occupé dans la cible de F^{19}, nécessite l'introduction des états liés à N = 20 nucléons et la résolution explicite des équations couplées (II-42 a et b). Pour cela, nous nous limiterons encore à la seule équation de diffusion de type (II-42b) correspondant à la voie de réaction définie par le fondamental γ_o de la cible. A chaque état lié $|\tilde{\alpha}\rangle_n$ à 20 nucléons, correspond une équation du type (II-42a). Pour permettre la réalisation effective des calculs, nous considérons successivement pour ces états deux espaces modèles définis en (III.4.2b). Les configurations $|\tilde{\alpha}\rangle_n$ retenues contiennent toutes au moins un état à une particule 2s, dont la fonction d'onde radiale présente le même nombre de noeuds à distance finie que celle de l'état individuel de diffusion s. Par suite, pour ces configurations, les éléments de matrice ${}_n\langle\tilde{\alpha}|v|\gamma_o\tilde{\varphi}\rangle_n$ de couplage entre les équations a et b, sont importants.

Dans le premier modèle, nous introduisons uniquement la configuration déjà mentionnée en (V.1.2), obtenue en antisymétrisant le fondamental du F^{19} avec l'état à une particule 2s. L'état général à 20 nucléons est donc de

j_1 j_2 j_3 j_4	COUPLAGES	N°
$(5/2)^3$ 1/2	$\|\{(5/2)^2\ 21,\ 5/2\}\ 1/2,1/2> \|1/2>$	1
$(5/2)^2$ $(1/2)^2$	$\|(5/2)^2\ 01> \quad \|(1/2)^2\ 01>$	2
$(5/2)^2$ 1/2 3/2	$\|(5/2)^2\ 10> \quad \|(1/2,3/2)\ 11>$	3
	$21 \qquad 20$	4
	$21 \qquad 21$	5
5/2 $(1/2)^2$ 3/2	$\|(1/2)^2\ 10> \quad \|(5/2,3/2)\ 11>$	6
5/2 1/2 $(3/2)^2$	$\|(5/2,1/2)\ 20> \quad \|(3/2)^2\ 21>$	7
	$21 \qquad 21$	8
	$31 \qquad 30$	9
$(1/2)^2$ $(3/2)^2$	$\|(1/2)^2\ 01> \quad \|(3/2)^2\ 01>$	10
1/2 $(3/2)^3$	$\|1/2> \|\{(3/2)^2\ 10,\ 3/2\}\ 1/2,1/2>$	11

Tableau 30 : Configurations en couplage j-j à quatre nucléons dans la couche 2s-1d, incluant au moins un état 2s, antisymétrisées et couplées en spin et isospin à $J = 0$ et $T = 1$ (D.2.3b).

j_1 j_2 j_3 j_4	COUPLAGES	N°
$(5/2)^3$ 1/2	$\|\{(5/2)^2$ 21, 5/2} 1/2,1/2 > $\|1/2>$	1
	3/2,1/2	2
	3/2,3/2	3
$(5/2)^2$ $(1/2)^2$	$\|(5/2)^2$ 01 > $\|(1/2)^2$ 10 >	4
	10 01	5
	21 10	6
$(5/2)^2$ 1/2 3/2	$\|(5/2)^2$ 01 > $\|(1/2,3/2)$ 10 >	7
	01 11	8
	10 11	9
	10 21	10
	21 10	11
	21 11	12
	21 20	13
	21 21	14
	30 21	15
5/2 $(1/2)^2$ 3/2	$\|(1/2)^2$ 01 > $\|(5/2,3/2)$ 10 >	16
	01 11	17
	10 11	18
	10 21	19
5/2 1/2 $(3/2)^2$	$\|(5/2,1/2)$ 20 > $\|(3/2)^2$ 21 >	20
	21 10	21
	21 21	22
	21 30	23
	30 21	24
	31 21	25
	31 30	26
$(1/2)^3$ 3/2	$\|\{(1/2)^2$ 01, 1/2} 1/2,1/2 > $\|3/2>$	27
$(1/2)^2$ $(3/2)^2$	$\|(1/2)^2$ 01 > $\|(3/2)^2$ 10 >	28
	10 01	29
	10 21	30
1/2 $(3/2)^3$	$\|1/2> \|\{(3/2)^2$ 21, 3/2} 1/2,1/2 >	31
	3/2,1/2	32
	3/2,3/2	33

Tableau 31 : Configurations en couplage j-j à quatre nucléons dans la couche 2s-1d, incluant au moins un état 2s, antisymétrisées et couplées en spin et isospin à $J = 1$ et $T = 1$ (D.2.3b).

la forme :

$$|\widetilde{\Psi}\rangle = a\,\frac{1}{\sqrt{n}}\,\frac{1}{\sqrt{20}}\,\mathcal{A}(19,1)\left(|\widetilde{F^{19}}\rangle_n\,|2s\,1/2\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{20}}\,\mathcal{A}(19,1)\left(|\widetilde{F^{19}}\rangle_n\,|\varphi\rangle\right), \qquad \text{(V-2)}$$

où la norme n est définie dans le tableau 29. Contrairement au cas simple de l'état (IV-1), le facteur $1/\sqrt{20}$ n'assure pas la normalisation de l'état lié à 20 nucléons, car l'état 2s étant présent dans le F^{19}, le principe de Pauli introduit des règles de sélection. Les inconnus dans $|\widetilde{\Psi}\rangle$ sont l'amplitude a et l'état individuel de diffusion $|\varphi\rangle$.

Dans le deuxième modèle, nous considérons un espace plus vaste pour les états liés à 20 nucléons, à savoir : l'ensemble des états dont la couche externe au coeur de O^{16} est une configuration à un proton et trois neutrons dans la couche 2s-1d, et contenant au moins un état 2s. La liste de ces configurations orthonormalisées et antisymétrisées en couplage j-j est donnée respectivement dans les tableaux 30 et 31 pour les voies J = 0 et J = 1. L'état général à 20 nucléons s'écrit dans ce cas sous la forme :

$$|\Psi\rangle = \sum_{\alpha} a_{\alpha}\,|\widetilde{\alpha}\rangle_n + \frac{1}{\sqrt{20}}\,\mathcal{A}(19,1)\left(|\widetilde{F^{19}}\rangle_n\,|\varphi\rangle\right), \qquad \text{(V-3)}$$

où les inconnues sont l'état individuel de diffusion $|\varphi\rangle$ et les composantes a_α , au nombre de 11 dans la voie J = 0 et 33 dans la voie J = 1.

Notons que l'état (V-2) appartient aussi à l'espace de configurations du deuxième modèle. Cependant, dans le premier modèle, au lieu de laisser libres les composantes a_α , leurs valeurs relatives sont fixées par le choix d'un mélange de configurations décrivant le fondamental du F^{19}. Seul reste alors à déterminer le facteur multiplicatif global a.

b) Interprétation de la force effective à deux corps, potentiel à un corps.

- Dans ce chapitre, nous considérons uniquement la deuxième interprétation de la force effective à deux corps (III.3.1), à savoir : les termes d'interaction avec les nucléons du coeur sont remplacés par le champ moyen $V^{(1)}$ et, si on néglige les excitations particule-trou du coeur, seuls les nucléons de la couche externe interagissent par l'intermédiaire de la force résiduelle

à deux corps. Dans cette interprétation, le champ moyen $V^{(1)}$ doit nécessairement être un potentiel réaliste, borné pour les grandes distances. Nous utiliserons un potentiel de Wood-Saxon (III.2.2b).

La première interprétation de la force ($V = V^{(2)}$) conduirait à des calculs beaucoup trop longs, car il faudrait aussi calculer la contribution des interactions à deux corps entre les nucléons de la couche externe et ceux du coeur.

- Nous avons déjà évoqué (III.2.2) la difficulté de définir expérimentalement des énergies de particules indépendantes pour le F^{19}. Les valeurs adoptées sont celles définies par le spectre de O^{17} (Fig. 3), qui conduisent à de bons résultats pour la description des états liés du F^{19} (III.4.1b) Cependant, ces énergies sont certainement différentes des énergies propres du champ moyen self consistant du F^{19}. En particulier, celle de l'état 2s de neutron (-3.275 Mev) est trop grande en valeur absolue, car la longueur de diffusion (b = 5.432 fm) pour le potentiel de Wood-Saxon (Tab. 8) reproduisant cet état, est inférieure aux valeurs expérimentales (V-1). Par suite, les longueurs de diffusion que nous obtiendrons dans le calcul complet, où les termes d'interaction résiduelle s'ajoutent au champ moyen, seront encore plus faibles. Néanmoins, pour éviter d'introduire de nouveaux paramètres, nous avons conservé les énergies précédentes. Notre but dans ce chapitre est surtout d'étudier l'importance des corrections dues à l'antisymétrisation et aux couplages entre les états à N nucléons liés et ceux à une particule dans le continu.

c) Dépendance en l'énergie de liaison de la cible.

Dans l'équation de type b (II.42b), seule considérée jusque là, l'énergie de liaison E_{γ_o} de la cible n'intervient pas. En effet, seule figure l'énergie d'excitation :

$$\mathcal{E}_{\gamma_o} = E - E_{\gamma_o} \quad . \tag{V-4}$$

Par contre, dans les équations de type a, l'énergie E_{γ_o} intervient explicitement quand on exprime l'énergie à laquelle on résout l'équation de Schrödinger, par (V-4) :

$$E = E_{\gamma_o} + \mathcal{E}_{\gamma_o} \quad .$$

Pour être cohérent, nous devons calculer E_{γ_o} comme dans la prédiagonalisation (III.4.1b), en utilisant les mêmes énergies de particules indépendantes et la même interaction à deux corps que celles adoptées dans la résolution complète des équations (II-42). L'énergie de liaison E_{γ_o} du fondamental du F^{19} et les termes diagonaux E_α relatifs aux différents états liés $|\tilde{\alpha}\rangle_n$ à 20 nucléons, s'écrivent sous la forme :

$$E_{\gamma_o} = E_{O^{16}} + {}_n\langle\tilde{\gamma}_o|H_o|\tilde{\gamma}_o\rangle_n + {}_n\langle\tilde{\gamma}_o|v|\tilde{\gamma}_o\rangle_n \quad , \qquad \text{(V-5)}$$

$$E_\alpha = E_{O^{16}} + {}_n\langle\tilde{\alpha}|H_o|\tilde{\alpha}\rangle_n + {}_n\langle\tilde{\alpha}|v|\tilde{\alpha}\rangle_n \quad , \qquad \text{(V-6)}$$

où, négligeant les excitations particule-trou du coeur de O^{16}, l'interaction résiduelle v porte uniquement sur les nucléons des couches externes.

d) Diagonalisation du hamiltonien vrai H dans le sous-espace des états liés à N = 20 nucléons.

Pour analyser le couplage entre l'état de diffusion $|\tilde{\Psi}\rangle$ et les configurations liées à N = 20 nucléons, nous diagonalisons le hamiltonien vrai H dans le sous-espace considéré pour ces derniers états. C'est le hamiltonien H^{11} introduit en (II-11) (Fig. 1). Cette diagonalisation de la matrice :

$${}_n\langle\tilde{\alpha}|H|\tilde{\alpha}'\rangle_n = [E_{O^{16}} + {}_n\langle\tilde{\alpha}|H_o|\tilde{\alpha}\rangle_n]\,\delta_{\alpha\alpha'} + {}_n\langle\tilde{\alpha}|v|\tilde{\alpha}'\rangle_n \quad , \qquad \text{(V-7)}$$

définit la base propre orthonormée d'états liés $|\tilde{\delta}\rangle_n$ à 20 nucléons. Les énergies E_δ de ces états, rapportées au fondamental γ_o du F^{19} plus un neutron au repos d'énergie $m_n c^2$, s'écrivent :

$$\Delta E_\delta \equiv E_\delta - E_{\gamma_o} - m_n c^2 \quad . \qquad \text{(V-8)}$$

Dans le premier modèle d'espace de configurations liées à 20 nucléons, l'énergie ΔE_δ du seul état lié considéré, $|(F^{19},\widetilde{2s1/2})J,T = 1\rangle_n$ est donnée dans le tableau 32 pour les deux voies J = 0 et J = 1.

Les valeurs propres obtenues dans l'espace de configurations plus grand du deuxième modèle (Tab. 30 et 31), figurent dans le tableau 35 pour la force de Serber de profondeur -35 Mev, et dans le tableau 36 pour la force I.G.E. 1 de même profondeur.

Force V_o = -35 Mev	ΔE_δ (Mev)	
	J = 0	J = 1
Serber	-1.020	-0.761
I.G.E. 1	-0.644	-0.244

Tableau 32 : Energie de liaison nucléaire, rapportée au fondamental du F^{19} plus un neutron à l'infini, de l'état $|(F^{19}\tilde{,}2s1/2)J,T = 1\rangle_n$, calculée pour le mélange de configurations IV du F^{19} (Tab. 11) en utilisant des fonctions d'onde radiales de Wood-Saxon (Tab. 8) et les énergies de particules indépendantes de neutron de O^{17} (Fig. 3).

On notera que les énergies de liaison expérimentales des plus bas états excités du F^{20} de spin et parité 0^+ et 1^+ sont respectivement[38] :

$$(\Delta E)^{0^+} = -3.075 \text{ Mev} \quad , \quad (\Delta E)^{1^+} = -5.544 \text{ Mev.}$$

e) Test des programmes de calcul.

Etant donné la complexité des programmes numériques de résolution des équations couplées (II-42), il était important d'effectuer le maximum de tests de ces calculs. Pour cela, nous avons utilisé des états fictifs du F^{19} correspondant à des mélanges de configurations ne contenant pas l'état à une particule 2s. Dans ce cas (IV-1), en nous limitant à la seule configuration liée à 20 nucléons $|(F^{19}\tilde{,}2s1/2)J,T = 1\rangle_n$, nous pouvons traiter le problème de diffusion dans le cadre du modèle simple, décrit en (II.4.2) et utilisé au chapitre IV pour les noyaux magiques et voisins. Nous avons ainsi vérifié que nous obtenions la même longueur de diffusion et la même composante sur l'état $|(F^{19}\tilde{,}2s1/2)J,T = 1\rangle_n$, en résolvant le problème des deux façons suivantes :

1- comme au chapitre IV, en considérant une seule équation de type (II-42b) et en n'introduisant que le terme correctif d'antisymétrisation avec l'état 1s, la composante sur l'état lié à 20 nucléons s'obtenant par projection de l'état individuel de diffusion sur l'état 2s (II-60),

2 - par le programme de résolution complet, couplant l'état lié $|(F^{19},\widetilde{2s1/2})J,T = 1\rangle_n$ à l'état à une particule dans le continu $|(F^{19},\widetilde{\varphi})J,T = 1\rangle_n$.

V.2.2. Résonances et discussion des résultats dans deux modèles d'espace de configurations liées à N nucléons.

a) Mise en évidence des résonances.

Dans la base propre $|\widetilde{\delta}\rangle_n$ (V.2.1d) du hamiltonien vrai H restreint au sous-espace des états liés à N nucléons, les équations (II-30a) s'écrivent sous la forme simple suivante :

$$(E_\delta - E)\, a_\delta + \sum_{\gamma'} {}_n\langle \widetilde{\delta} | v | \widetilde{\gamma'_{\ell} \varphi_{\gamma'}} \rangle_n = 0 \quad , \qquad \text{(V-9)}$$

d'où l'on extrait la valeur de a_δ , pourvu que E soit différent de E_δ . Si E est égale à E_δ , il y a résonance ; les éléments de matrice ${}_n\langle \widetilde{\delta} | v | \widetilde{\gamma'_{\ell} \varphi_{\gamma'}} \rangle_n$ étant non nuls, a_δ est alors infini. Dans ce cas, l'état géneral $|\widetilde{\Psi}\rangle$ à N nucléons :

$$|\widetilde{\Psi}\rangle = \sum_\delta a_\delta |\widetilde{\delta}\rangle_n + \sum_\gamma |\widetilde{\gamma_{\ell} \varphi_\gamma}\rangle_n \quad , \qquad \text{(V-10)}$$

correspond à l'état qúasi-lié $|\widetilde{\delta}\rangle_n$ dont l'énergie de liaison est celle à laquelle on résout l'équation de Schrödinger.

Afin d'évaluer l'importance du couplage entre les états $|\widetilde{\delta}\rangle_n$ et $|\widetilde{\gamma_{\ell} \varphi_\gamma}\rangle_n$, comparons la solution φ des équations couplées(II-42a et b) avec celle φ_o que l'on obtient en négligeant ce couplage. Pour cela, écrivons l'équation (II-41b) avec les états $|\widetilde{\delta}\rangle_n$, en nous limitant toujours à une seule voie de réaction définie par l'état fondamental γ_o de la cible et l'état individuel de diffusion φ :

$$\sum_\delta \Big[\langle \gamma_o, ri | v | \widetilde{\delta} \rangle_n - \sum_n \oint_{ni}(r) \langle \gamma_o, ni | v | \widetilde{\delta} \rangle_n \Big] \sqrt{N}\, a_\delta$$

$$+ (E_{\gamma_o} + k - E)\, \varphi(r)$$

$$+ \langle \gamma_o, ri | v_d | \widetilde{\gamma_o \varphi} \rangle - \sum_n \oint_{ni}(r) \langle \gamma_o, ni | v_d | \widetilde{\gamma_o \varphi} \rangle = 0 \quad . \qquad \text{(V-11)}$$

L'état individuel de diffusion approché φ_o est solution de cette équation où les termes de couplage avec les états liés $|\widetilde{\delta}\rangle_n$ sont négligés. Par une

technique déjà utilisée en (II.4.3), on exprime la dérivée par rapport à la variable r, du Wronskien des fonctions $r\varphi_o(r)$ et $r\varphi(r)$ en fonction des termes de couplage, soit :

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d}{dr}\,W(r\varphi_o, r\varphi) = \\
&- r^2\varphi_o(r)\left[\langle\gamma_o, ri|V_d|\tilde{\gamma_o}\varphi\rangle - \sum_n f_{ni}(r)\langle\gamma_o, ni|V_d|\tilde{\gamma_o}\varphi\rangle\right] \\
&+ r^2\varphi(r)\left[\langle\gamma_o, ri|V_d|\tilde{\gamma_o}\varphi_o\rangle - \sum_n f_{ni}(r)\langle\gamma_o, ni|V_d|\tilde{\gamma_o}\varphi_o\rangle\right] \\
&- \sum_\delta r^2\varphi_o(r)\left[\langle\gamma_o, ri|V|\tilde{\delta}\rangle_n - \sum_n f_{ni}(r)\langle\gamma_o, ni|V|\tilde{\delta}\rangle_n\right]\sqrt{N}\,a_\delta .
\end{aligned}
\qquad \text{(V-12)}
$$

Après intégration de cette équation sur r, de zéro à l'infini, on exprime pour un problème de diffusion à énergie nulle, le Wronskien en fonction des longueurs de diffusion b_o et b correspondant respectivement à φ_o et φ. On obtient alors :

$$
\frac{1}{b_o} - \frac{1}{b} = \frac{2\mu}{\hbar^2}\sum_\delta {}_n\langle\tilde{\gamma_o}\varphi_o|V|\tilde{\delta}\rangle_n\, a_\delta \quad . \qquad \text{(V-13)}
$$

Notons qu'en raison de l'orthogonalité (II-46) de $|\varphi_o\rangle$ avec les états liés $|ni\rangle$ de même nombre quantique i ,

$$
\int r^2 dr\ \varphi_o(r)\, f_{ni}(r) = 0 \quad , \qquad \text{(V-14)}
$$

les termes correctifs d'antisymétrisation dans (V-12) n'interviennent plus dans l'équation (V-13). Remplaçant dans (V-13) a_δ par sa valeur extraite de (V-9) pour E différent de E_δ , on obtient :

$$
\frac{1}{b_o} - \frac{1}{b} = \frac{-2\mu}{\hbar^2}\sum_\delta {}_n\langle\tilde{\gamma_o}\varphi_o|V|\tilde{\delta}\rangle_n\ \frac{1}{E_\delta - E}\ {}_n\langle\tilde{\delta}|V|\tilde{\gamma_o}\varphi\rangle_n \quad . \qquad \text{(V-15)}
$$

La présence du dénominateur en énergie montre bien que pour $|E_\delta - E|$ petit la valeur de b est très différente de la valeur approchée b_o.

Remarque : pour la résolution effective des équations couplées (II-42), l'utilisation des états propres $|\tilde{\delta}\rangle_n$ ne simplifie pas les calculs car ces vecteurs sont connus sous la forme de combinaisons linéaires des configurations $|\tilde{\alpha}\rangle_n$ (Tab. 30 et 31).

b) Résultats obtenus.

Nous avons déjà mentionné (V.2.1b) que le potentiel à un corps de Wood-Saxon (Tab. 8) reproduisant les énergies de particules indépendantes de neutron de $1'O^{17}$ (Fig. 3) est trop attractif, et que par suite, les longueurs de diffusion que nous calculons sont inférieures aux valeurs expérimentales (V-1). Les calculs sont effectués pour des profondeurs V_o de la force à deux corps de l'ordre de grandeur de celles adoptées habituellement en spectroscopie nucléaire.

En fait, dans cette étude notre but est surtout de mettre en évidence les effets les plus importants dus à l'antisymétrisation et aux résonances, dans la diffusion de neutrons thermiques. Pour cela, nous comparerons (Tab. 33 et 34) les longueurs de diffusion des deux voies de réaction J=0 et J=1, dans les cinq approximations suivantes :

- Dans les approximations (1), (2) et (5), comme au paragraphe (V.1), on néglige le couplage entre les équations (II-42a) et (II-42b) et on résout une seule équation de diffusion (II-42b) :

(1) en négligeant tous les termes correctifs d'antisymétrisation avec les états liés s,

(2) en ne tenant compte que du terme correctif d'antisymétrisation avec l'état 1s,

(5) en tenant compte des termes correctifs d'antisymétrisation avec les états 1s et 2s, comme si ce dernier était totalement occupé dans la cible.

- Dans les approximations (3) et (4), on résout le système d'équations couplées (II-42a et b) en considérant respectivement les deux modèles d'espace d'états liés à 20 nucléons définis en (III.4.2) et (V.2.1a) (Tab. 30 et 31).

Ces deux dernières approximations tiennent compte de l'occupation partielle de l'état 2s dans le fondamental de la cible de F^{19}. Elles correspondent donc à une situation physique intermédiaire entre celles que décrivent les approximations (2) et (5), à savoir : l'état 2s est soit inoccupé, soit totalement occupé dans la cible. Le caractère intermédiaire des approximations (3) et (4) sera évalué par les variations relatives des longueurs de diffusion : $\frac{b(2) - b(3)}{b(2) - b(5)}$ et $\frac{b(2) - b(4)}{b(2) - b(5)}$, où b(i) désigne la valeur de la longueur de

V_0(Mev)	Approximation	b_-(fm)	b_+(fm)	A(fm)	B(fm)
Serber	(1)	4.797	4.822	4.815	0.025
	(2)	4.795	4.821	4.814	0.026
	(3)	4.635	4.566	4.583	-0.069
-35	(4)	4.602	4.812	4.759	0.210
	(5)	4.429	4.487	4.473	0.058
	$\frac{(2)-(3)}{(2)-(5)}$	0.438	0.763		
	$\frac{(2)-(4)}{(2)-(5)}$	0.527	0.027		
	(1)	4.721	4.749	4.742	0.028
	(2)	4.718	4.748	4.740	0.029
	(3)	4.510	4.411	4.436	-0.099
-40	(4)	4.477	4.643	4.601	0.166
	(5)	4.229	4.302	4.284	0.073
	$\frac{(2)-(3)}{(2)-(5)}$	0.425	0.755		
	$\frac{(2)-(4)}{(2)-(5)}$	0.494	0.236		

Tableau 33:F^{19}. Longueurs de diffusion calculées en utilisant des fonctions d'onde radiales de Wood-Saxon (Tab. 8), la force à deux corps de Serber (Tab. 9) et le mélange de configurations IV (Tab. 11), approximations :

(1)- sans correction d'antisymétrisation,

(2)- avec correction d'antisymétrisation avec 1s,

(3)- avec corrections d'antisymétrisation avec 1s et 2s et couplage avec l'état $|(F^{19}, \widetilde{2s1/2})J, T = 1\rangle_n$,

(4)- avec corrections d'antisymétrisation avec 1s et 2s et couplage avec les 11 configurations J=0 (Tab. 30) et les 33 configurations J=1 (Tab. 31),

(5)- avec corrections d'antisymétrisation avec 1s et 2s et sans couplage avec les configurations à 20 nucléons liés.

diffusion dans l'approximation (i).

Les résultats présentés au paragraphe (V.1.1) et ceux obtenus dans les approximations (1), (2) et (5), correspondent respectivement aux deux interprétations de la force effective à deux corps, introduites en (III.3.1). Comparons ainsi les résultats calculés dans ces deux cas (Tab. 28 et 33), en utilisant le mélange de configurations IV (Tab. 11) pour décrire le F^{19}, les fonctions d'onde radiales de Wood-Saxon (Tab. 8) et la force de Serber. Ils sont qualitativement semblables, les valeurs du paramètre B sont du même ordre de grandeur. Entre les approximations (1) et (2), l'effet du terme correctif d'antisymétrisation avec 1s est très faible sur les longueurs de diffusion. Par contre (cf. II.4.3), entre les approximations (2) et (5), l'introduction du terme correctif d'antisymétrisation avec 2s diminue les longueurs de diffusion de 8% (Tab. 33). Cette diminution est seulement de 4% dans le cas de la force I.G.E. 1 (Tab. 34). Les effets de ces termes correctifs d'antisymétrisation sont plus faibles qu'en (V.1.1b). Cela correspond au fait que le potentiel vu par le neutron incident, dans la deuxième interprétation de la force effective à deux corps, n'est pas très différent du potentiel de champ moyen qui définit les états liés à un corps.

Une comparaison quantitative des résultats obtenus dans les deux interprétations de la force à deux corps nécessiterait une description plus correcte du champ moyen self-consistant du F^{19}. En particulier le potentiel à un corps des états s devrait être moins attractif que celui que nous utilisons (V.2.1b).

Dans le premier modèle d'espace de configurations liées à 20 nucléons (approximation 3), pour les forces considérées (Tab. 33 et 34), nous sommes loin d'une situation résonnante. En effet, l'énergie de liaison ΔE_δ de la seule configuration liée introduite : $|(F^{19},\widetilde{2s1/2})J,T=1\rangle_n$, rapportée à l'énergie du fondamental du F^{19} plus un neutron à l'infini, est en valeur absolue de plusieurs centaines de keV (Tab. 32). De plus, la composante a (V-2) de l'état général à 20 nucléons sur la configuration liée $|(F^{19},\widetilde{2s1/2})J,T=1\rangle_n$, est faible. Dans les voies J=0 et J=1, elle vaut respectivement : -0.216 et -0.142 pour la force de Serber de profondeur -35 MeV, et -0.154 et -0.048 pour la force I.G.E. 1 de même profondeur. Pour les paramètres des forces adoptées on ne se trouve pas dans une situation résonnante. Toutefois il ne faut pas y attacher trop d'importance, car en faisant varier les paramètres de la force à deux corps (paramètres d'échange et profondeur) on doit pouvoir modifier

V_0 (Mev)	Approximation	b_- (fm)	b_+ (fm)	A(fm)	B(fm)
I.G.E. 1	(1)	4.959	4.982	4.976	0.023
	(2)	4.959	4.982	4.976	0.023
	(3)	4.888	4.828	4.843	-0.060
	(4)	4.879	8.546	7.629	3.667
-35	(5)	4.785	4.819	4.811	0.035
	$\frac{(2)-(3)}{(2)-(5)}$	0.406	0.947		
	$\frac{(2)-(4)}{(2)-(5)}$	0.458	-21.91		
	(1)	4.901	4.927	4.921	0.026
	(2)	4.900	4.927	4.920	0.027
	(3)	4.808	4.724	4.745	-0.085
	(4)	4.815	5.628	5.425	0.813
-40	(5)	4.669	4.712	4.701	0.043
	$\frac{(2)-(3)}{(2)-(5)}$	0.398	0.945		
	$\frac{(2)-(4)}{(2)-(5)}$	0.369	-3.259		

Tableau 34 : F^{19} . Longueurs de diffusion calculées en utilisant des fonctions d'onde radiales de Wood-Saxon (Tab. 8), la force à deux corps I.G.E. 1, et le mélange de configurations IV (Tab. 11).
Voir légende des approximations (Tab. 33).

l'énergie de liaison relative ΔE_δ de l'état lié précédent, et en particulier l'annuler.

Le caractère non résonnant des cas étudiés, nous permet d'isoler les effets d'antisymétrisation. Comme nous l'avions prévu qualitativement en (V.1.2), la correction d'antisymétrisation tenant compte de l'occupation partielle de l'état 2s dans la cible de F^{19}, est dans ce modèle, plus importante dans la voie J=1 que dans la voie J=0. La valeur du rapport $\frac{b(2) - b(3)}{b(2) - b(5)}$ est ainsi pratiquement deux fois plus grande pour J=1 que pour J=0 (Tab. 33 et 34). La diminution des longueurs de diffusion en passant successivement des approximations (1) et (2) puis (2) à (5), est comme en (V.1.1), du même ordre pour b_+ et b_- ; d'où une valeur inchangée de B. Par contre dans l'approximation (3) la longueur de diffusion b_+ étant plus réduite que b_-, nous obtenons un paramètre de dépendance en spin B de signe opposé. Nous avons obtenu les mêmes résultats pour les forces I.G.E. 2 et 3, ainsi qu'en utilisant le mélange de configurations II au lieu du IV (Tab. 11), pour décrire le fondamental de la cible.

Ce modèle simple montre bien dans une situation non résonnante, le rôle important joué par l'antisymétrisation et la grande sensibilité du paramètre B à ces corrections.

Dans le deuxième modèle d'espace de configurations (approximation 4), on considère 11 états liés $|\tilde{\alpha}\rangle_n$ dans la voie J=0 (Tab. 30), et 33 dans la voie J=1 (Tab. 31). Les composantes a_α de l'état $|\tilde{\Psi}\rangle$ à N nucléons (V-3) sur ces configurations liées $|\tilde{\alpha}\rangle_n$, calculées en utilisant les forces à deux corps de Serber et I.G.E. 1 de profondeur -35 Mev, figurent respectivement dans les tableaux 35 et 36.

Dans cette approximation (4), que l'on soit ou non au voisinage d'une résonance correspondant à une petite valeur de $|\Delta E_\delta| = |E_\delta - E|$, dépend de manière très sensible, des paramètres de la force à deux corps utilisée. En effet, en faisant varier ces paramètres, on change les énergies E_δ des états propres $|\tilde{\delta}\rangle_n$ du hamiltonien vrai H dans le sous-espace des états liés à 20 nucléons. Pour les forces de Serber et I.G.E. 1, et les différentes profondeurs V_o étudiées, nous n'avons pas observé d'effet de résonance dans la voie J=0. En fait, comme dans l'approximation précédente (3) où nous avions un seul état lié à 20 nucléons, le nombre réduit (11) de configurations considérées dans la voie J=0, fait qu'il est peu probable qu'une valeur propre E_δ soit

N°	J = 1			N°	J = 0		
	a_α	ΔE_δ (Mev)	a_δ		a_α	ΔE_δ (Mev)	a_δ
1	-0.054	15.37	0.001	1	-0.072	15.26	0.002
2	-0.001	14.66	-0.0007	2	-0.220	10.41	-0.011
3	0.038	13.96	0.00001	3	0.021	9.76	-0.004
4	0.093	10.78	-0.0017	4	0.068	8.74	-0.005
5	-0.061	10.24	0.0031	5	-0.032	7.78	-0.003
6	-0.108	10.09	-0.0027	6	0.034	4.36	-0.009
7	0.049	9.46	0.0008	7	0.007	2.79	-0.016
8	0.009	8.95	-0.0005	8	-0.028	1.95	-0.021
9	0.100	8.71	-0.0003	9	-0.003	0.68	0.121
10	0.039	8.67	-0.0027	10	0.078	-1.76	0.189
11	0.200	8.13	0.0028	11	-0.011	-7.40	-0.130
12	-0.111	7.89	0.0020				
13	0.136	7.20	0.0074				
14	-0.224	5.45	0.0236				
15	0.281	4.84	-0.0069				
16	-0.121	4.65	-0.0106				
17	0.263	4.16	0.0134				
18	-0.149	3.71	0.0089				
19	0.121	2.93	0.0047				
20	0.092	2.60	0.0219				
21	-0.117	2.23	0.0322				
22	-0.028	1.83	0.0773				
23	0.001	1.72	-0.0173				
24	0.151	0.95	-0.0126				
25	-0.009	0.64	-0.0123				
26	-0.026	-0.59	-0.6346				
27	-0.027	-1.41	0.0307				
28	-0.066	-1.50	0.0868				
29	-0.115	-1.97	0.0252				
30	0.004	-3.07	0.0522				
31	-0.052	-4.87	-0.0249				
32	0.007	-6.37	-0.0089				
33	-0.028	-7.18	-0.0812				

Tableau 35 : F^{19}.
Mélange de configurations IV (Tab. 11), force de Serber (V_0 = -35 Mev, Cf. Tab. 33).

- a_α : composantes de l'état quasi-lié sur les configurations des Tab.30 et 31,
- ΔE_δ : énergies des états propres δ du hamiltonien vrai H dans le sous-espace des états à 20 nucléons liés, rapportées au fondamental du F^{19} plus un neutron à l'infini,
- $a_\delta = {}_\pi\langle\tilde{\delta}|\tilde{\Psi}\rangle$: composantes de l'état quasi-lié sur les états propres δ.

voisine du seuil de réaction, par contre, dans la voie J=1, où le nombre d'états liés introduits est plus grand (33), on observe un phénomène de résonance très marqué pour la force I.G.E. 1 (Tab. 34 et 36), et moins important pour la force de Serber (Tab. 33 et 35). Les états $|\tilde{\delta}\rangle_n$ correspondant à de faibles valeurs absolues de l'énergie de liaison relative ΔE_δ , figurent parmi les configurations fortement couplées à $|\tilde{\Psi}\rangle$; cela se traduit par d'importantes composantes $a_\delta = {}_n\langle\tilde{\delta}|\tilde{\Psi}\rangle$.

Dans la voie J=0, non résonnante, l'énergie relative ΔE_δ de plus faible valeur absolue est de 0.68 Mev pour la force de Serber de profondeur -35 Mev, et de -1.48 Mev pour la force I.G.E. 1 de même profondeur. La valeur de la longueur de diffusion b_- est intermédiaire entre celles obtenues dans les approximations (2) et (5) et diffère très peu de celle obtenue avec l'approximation (3).

Dans la voie J=1, la situation résonnante dans le cas de la force I.G.E. 1 de profondeur -35 Mev, correspond à l'existence d'un état propre $|\tilde{\delta}\rangle_n$ du hamiltonien vrai dans le sous-espace des états liés à 20 nucléons, d'énergie de liaison relative très faible : 4 keV (Tab. 36). La composante liée de $|\tilde{\Psi}\rangle$ se réduit alors pratiquement à cet état quasi-lié, ainsi la valeur de $a_\delta = {}_n\langle\tilde{\delta}|\tilde{\Psi}\rangle$ correspondante est au moins cinq cents fois plus grande en valeur absolue, que les autres composantes. La longueur de diffusion b_+ (Tab. 34) est alors très différente de celles obtenues dans les approximations précédentes Comme pour cette force, il n'y a pas résonance dans la voie J=0, la valeur du paramètre B égale à $b_+ - b_-$ se trouve considérablement modifiée. Une variation de 5 Mev de la profondeur de la force à deux corps I.G.E. 1, nous écarte de la résonance. L'énergie de liaison relative ΔE_δ , la plus faible en valeur absolue, passe de -4 keV à -161 keV. Cependant, même dans ce cas, la valeur de b_+ reste très différente de celle obtenue dans les autres approximations. Cela tient au grand nombre de termes ayant un dénominateur ΔE_δ faible en valeur absolue, qui contribuent dans l'équation (V-15) à la correction due au couplage entre les états liés à N nucléons et celui à une particule dans le continu. De plus, le couplage entre ces états, par l'intermédiaire des éléments de matrice de l'interaction résiduelle ${}_n\langle\tilde{\delta}|v|\tilde{\gamma\varphi}\rangle_n$ crée un décalage en énergie et introduit une largeur pour les états résonnants quasi-liés[9].

Dans le cas de la force de Serber, on n'obtient pas d'effet de résonance très marqué. Cependant, une variation de 5 Mev de la profondeur de cette interaction à deux corps, entraine un changement important de la position relative

N°	J = 1			N°	J = 0		
	a_α	ΔE_δ (Mev)	a_δ		a_α	ΔE_δ (Mev)	a_δ
1	-0.182	14.99	0.00008	1	-0.064	14.45	0.001
2	0.362	14.34	0.00001	2	-0.189	10.19	-0.010
3	0.524	14.13	-0.00003	3	0.012	9.95	-0.000
4	0.287	10.72	0.00006	4	0.013	8.61	-0.002
5	-0.406	10.18	0.00006	5	-0.051	7.66	0.001
6	-0.426	9.78	0.0002	6	0.022	4.66	0.010
7	1.112	9.47	-0.00001	7	0.009	2.84	-0.003
8	-0.308	9.23	0.00003	8	-0.004	1.79	-0.068
9	0.802	8.81	0.00009	9	-0.003	1.54	-0.052
10	0.900	8.57	0.0002	10	0.050	-1.48	-0.173
11	1.229	8.08	0.0002	11	-0.001	-6.84	-0.091
12	-0.941	7.73	-0.00000				
13	0.745	7.30	-0.0006				
14	-1.768	5.45	-0.0016				
15	2.720	4.86	-0.0017				
16	-2.098	4.61	0.00002				
17	2.254	4.07	0.0009				
18	-0.778	3.73	0.0007				
19	1.011	3.04	-0.00004				
20	0.533	2.73	-0.0009				
21	-0.874	2.16	-0.0014				
22	-0.166	1.83	0.0041				
23	-0.344	1.76	0.0022				
24	1.284	1.33	0.0010				
25	0.094	0.97	0.0031				
26	-0.207	-0.004	-5.751				
27	-0.789	-0.75	0.0096				
28	-0.489	-1.22	0.0006				
29	-0.932	-1.79	-0.0009				
30	0.029	-2.91	0.0017				
31	-0.437	-4.17	-0.0018				
32	-0.068	-5.62	-0.0000				
33	-0.121	-6.49	-0.0028				

Tableau 36 : F^{19}.

Mélange de configurations IV (Tab. 11), force I.G.E. 1 (V_0 = -35 Mev, Cf. Tab. 34). Voir légende au tableau 35.

de b_+, par rapport aux valeurs obtenues dans les approximations (2) et (5). Ainsi, (Tab. 33) le rapport $\frac{b(2) - b(4)}{b(2) - b(5)}$ passe de 0.027 pour V_o = -35 Mev, à 0.236 pour V_o =-40 Mev, alors que dans la voie J=0 ce rapport est resté pratiquement constant. En suivant l'évolution des résultats quand la profondeur V_o décroit de -20 Mev à -60 Mev, on constate que l'on s'éloigne d'une situation résonnante : la plus faible valeur absolue de ΔE_δ augmente, et un grand nombre de composantes a_δ (Tab. 35) ont une valeur absolue non négligeable.

Dans les cas présentés (Tab. 35 et 36), c'est l'état propre $N^o 26$ qui présente la plus grande valeur absolue de la composante a_δ . Pour la force I.G.E. 1 comme pour celle de Serber, cet état correspond à un mélange de configurations important dans le sous-espace des états liés engendré par les configurations du tableau 31. Nous n'avons pas observé de couplage privilégié avec un état $|\tilde{\delta}\rangle_n$ particulier. Ainsi en changeant la profondeur de la force I.G.E. 1, on change non seulement les composantes, mais aussi le numéro de l'état propre de H^{11} qui se couple fortement avec la voie de diffusion.

Ces résultats montrent que dans le cas d'un grand nombre de configurations liées,couplées à la voie de réaction, il devient très difficile, voire impossible de prédire les valeurs des longueurs de diffusion, (ou des déphasages si on étudiait le problème à énergie non nulle). En effet, les résultats obtenus présentent des variations rapides au voisinage des résonances, et les positions de celles-ci sont très sensibles aux paramètres de la force à deux corps utilisée. La position de ces résonances pourrait également être changée en modifiant soit les énergies de particules indépendantes ε_i (III.2.1), soit l'énergie de liaison E_{γ_o} du fondamental de la cible,utilisée dans le calcul du terme d'énergie $E - E_{\gamma_o}$ (V-5 et 6). Les résultats sont donc très sensibles à la densité de niveaux au voisinage du seuil de la réaction. Dans le spectre expérimental du F^{20} (Fig. 15), la densité de niveaux au voisinage de l'énergie du fondamental du F^{19} plus un neutron à l'infini, est très grande. Parmi tous ces niveaux on a identifié des états ayant les mêmes nombres quantiques 0^+ et 1^+, que les voies de réaction considérées, et dont l'énergie rapportée au seuil de la réaction est très faible : 0.3 keV[38,42].

En conclusion, le formalisme présenté ne permet une description satisfaisante du processus de diffusion que si le nombre de configurations du modèle

des couches, au voisinage de l'énergie considérée, n'est pas trop grand. Par contre dans le cas d'un grand nombre de configurations, les résultats obtenus dépendent beaucoup du modèle. Une théorie statistique des réactions nucléaires[43] s'avère alors être actuellement le seul moyen d'aborder le traitement du grand nombre d'excitations correspondant aux niveaux du noyau composé. Cependant, les calculs présentés dans ce chapitre, constituent, dans un cas réaliste, une mise en évidence microscopique des effets de résonance, décrits habituellement dans le cadre du noyau composé.

CONCLUSION

Notre travail a porté sur l'étude de la diffusion des neutrons de basse énergie par les noyaux, et principalement sur la détermination microscopique des longueurs de diffusion des neutrons thermiques, dans le formalisme du modèle des couches étendu aux états à un nucléon dans le continu.

L'analyse des expériences de diffusion nucléon-noyau à plus haute énergie, en particulier l'étude de la dépendance en spin des amplitudes de diffusion, nécessiterait l'introduction d'autres voies de réaction que celles que nous avons considérées. On devrait ainsi inclure dans les calculs, d'une part des états individuels de moment orbital ℓ plus élevé, et d'autre part le spectre d'excitation du noyau cible. En fait, notre expérience acquise avec ce travail montre qu'en ne considérant que la voie de réaction définie par le fondamental de la cible et l'onde s de diffusion, on atteint les limites du modèle. Les principales limitations de ce formalisme microscopique sont en effet de deux types :

- celles inhérentes au modèle, en particulier la troncature de l'espace de configurations aux états ayant au plus un nucléon dans le continu.
- et celles communes à toutes les approches microscopiques de la théorie des réactions nucléaires , à savoir : faire face non seulement aux difficultés relatives aux problèmes de structure nucléaire, mais également à celles du traitement du continu.

Néanmoins, le travail présenté est une étape nécessaire à la description de réactions plus complexes en terme de la force nucléon-nucléon. Nous avons mis en évidence les effets importants dus à l'antisymétrisation et aux résonances.

Dans le formalisme utilisé, les états où tous les nucléons sont liés et ceux où une particule est dans le continu, sont décrits de manière cohérente dans un cadre unique au moyen d'une même interaction à deux corps. Cette même description s'applique également aux états de la cible qui sont ceux du modèle des couches, utilisés dans les calculs de spectroscopie nucléaire.

L'originalité de ce formalisme est de permettre un traitement rigoureux de l'antisymétrisation de l'ensemble cible plus neutron incident. Dans ce travail, nous nous sommes intéressés plus particulièrement à l'étude des effets dus à l'antisymétrisation. Ceux-ci se sont révélés importants pour tous les noyaux considérés.

Le traitement de l'antisymétrisation dans le cas des noyaux magiques C^{12}, O^{16} et Ca^{40}, ainsi que dans celui des noyaux voisins de spin non nul, C^{13} et O^{17}, a été étudié dans le cadre d'un modèle simple d'espace de configurations restreint. Les résultats obtenus pour les longueurs de diffusion et les déphasages de l'onde s, calculés en utilisant une force nucléon-nucléon effective de type Serber, sont en accord satisfaisant avec les valeurs expérimentales. Les effets des corrections d'antisymétrisation avec l'état 1s occupé dans les noyaux cibles, sont de l'ordre de 10 à 15 % sur les valeurs des longueurs de diffusion et sont très faibles sur celles des déphasages de l'onde s. Dans le cas du Ca^{40}, la correction d'antisymétrisation lorsque l'état 2s est occupé est importante. Il est vraisemblable que l'utilisation dans ce cas, d'un potentiel à un corps réaliste, de type Wood-Saxon, au lieu d'un potentiel d'oscillateur harmonique, réduirait l'effet de ces corrections. Ce résultat est général : les corrections d'antisymétrisation sont d'autant plus faibles que le champ moyen qui définit les états liés à une particule dans notre modèle, est plus proche du potentiel calculé vu par le neutron incident.

Pour le F^{19}, nous avons étudié le traitement de l'antisymétrisation dans le cas où les états de la cible sont décrits par un mélange de configurations. Ce problème n'avait pas encore été abordé pour la diffusion élastique. Les effets des résonances du noyau composé, dus au couplage par l'intermédiaire de l'interaction résiduelle entre les états du modèle des couches d'énergie voisine de celle considérée, et l'état à un nucléon dans le continu sont très importants. Les résonances observées ne sont pas significatives, elles sont en effet très liées au modèle d'espace de configurations adopté, ainsi qu'aux paramètres de la force à deux corps utilisée. Il devient alors très difficile de faire des prédictions sur les longueurs de diffusion. Les configurations liées introduites sont d'une part trop simples et donc fortement couplées à la voie de diffusion, et d'autre part en nombre trop réduit, pour reproduire les résonances expérimentales.

Enfin, aux physiciens du solide qui avaient suscité ce travail, nous apportons une réponse partielle concernant le paramètre B de dépendance en spin des longueurs de diffusion nucléaires. Nous prédisons en effet la valeur de B pour les noyaux C^{13} et O^{17} pour lesquels malheureusement les mesures sont délicates mais non irréalisables.

APPENDICES

A. DIFFRACTION DE NEUTRONS THERMIQUES

Nous avons écrit (III.1.1) les longueurs de diffusion nucléaires $b_{\pm}$ de neutrons thermiques par un noyau de spin I, dans les voies $J = I \pm 1/2$, sous la forme :

$$b_{\pm} = A + B(\vec{I}.\vec{s})_{\pm} \quad . \tag{A-1}$$

Montrons comment s'effectue la détermination des paramètres A et B par diffraction de neutrons thermiques, c'est-à-dire diffusion sur une structure ordonnée périodique.

Fixons les ordres de grandeur de l'énergie E, de la vitesse v et de la longueur d'onde λ des neutrons thermiques, pour différentes valeurs de la température :

T (K)	20	300	1000
E (e V)	$0.17\ 10^{-2}$	$2.59\ 10^{-2}$	$8.62\ 10^{-2}$
v (km/s)	0.574	2.224	4.060
λ (Å)	6.89	1.78	0.97

Tableau 1.

La longueur d'onde λ est très grande devant la portée des forces nucléaires (de l'ordre du fermi = 10^{-5} Å).

A.1. TRAITEMENT GENERAL DE LA DIFFRACTION DE NEUTRONS THERMIQUES.

Considérons la diffusion d'un faisceau de neutrons de vecteur d'onde $\vec{k}$, d'énergie $E = \hbar^2 k^2/2m$ et de projection m du spin sur un repère donné, par un réseau dont l'état est défini par l'ensemble des variables indicées par α. Les mêmes lettres primées désignent les valeurs des variables dans l'état final.

La section efficace différentielle s'exprime [44] sous la forme :

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega\, dE'} = \frac{k'}{k}\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2 \sum_{m\alpha} p_m p_\alpha \sum_{m'\alpha'} \left|\langle \vec{k}'\, m'\alpha' | T | \vec{k}\, m\alpha \rangle\right|^2 \delta(\hbar\omega + E_\alpha - E_{\alpha'}) \ , \tag{A-2}$$

où :

- la conservation de l'énergie se traduit par :

$$E + E_\alpha = E' + E_{\alpha'} \quad , \quad \hbar\omega = E - E' \ , \tag{A-3}$$

- la somme $\sum_{m\alpha} p_m p_\alpha$ correspond à une moyenne sur les états initiaux avec les probabilités p_m et p_α associées à la préparation du système faisceau de neutrons plus réseau, dans l'état initial,

- la somme $\sum_{m'\alpha'}$ porte sur les états finals α' du réseau et les projections m' du spin du neutron, que l'on n'observe pas.

On suppose que le réseau est un ensemble rigide de centres diffuseurs ponctuels occupant les sites $\vec{R}_\ell$. Dans les cas traités ci-dessous, les informations qui caractérisent l'état d'un réseau de maille donnée sont : la distribution des isotopes et les orientations des spins des centres diffuseurs.

A basse énergie (neutrons thermiques) seules les ondes s interviennent et la diffusion par un centre diffuseur est caractérisée par un paramètre b, la longueur de diffusion. A l'approximation de Born, négligeant les interactions multiples, la diffusion par le réseau est décrite par le pseudo-potentiel de Fermi,

$$V(\vec{r}) = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \sum_\ell \hat{b}_\ell \, \delta(\vec{r} - \vec{R}_\ell) \quad , \tag{A-4}$$

où $\hat{b}_\ell$ est un opérateur dont les valeurs propres sont les longueurs de diffusion :

$$b_\ell(m,\alpha) = \langle m\alpha | \hat{b}_\ell | m\alpha \rangle \quad . \tag{A-5}$$

Avec ces hypothèses et explicitant la partie spatiale de l'élément de matrice T sur les ondes planes $|\vec{k}\rangle$ et $|\vec{k}'\rangle$, (A-2) s'écrit :

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega\, dE'} = \frac{k'}{k} \sum_{m\alpha} p_m p_\alpha \sum_{m'\alpha'} \left| \sum_\ell \langle m'\alpha' | \hat{b}_\ell | m\alpha \rangle e^{i2\pi \vec{\chi}\cdot\vec{R}_\ell} \right|^2 \delta(\hbar\omega + E_\alpha - E_{\alpha'}) , \tag{A-6}$$

avec $\vec{\chi} = \vec{k}' - \vec{k}$.

Supposons maintenant que l'énergie E_α du réseau ne dépende pas de α ce qui est le cas, à une très bonne approximation pour des distributions d'isotopes ou des orientations de spins. La diffusion est alors élastique et après intégration sur E', la somme sur m' et α' est réalisée par la relation de fermeture,

$$\sum_{m'\alpha'} |m'\alpha'\rangle\langle m'\alpha'| = \mathbb{1} , \tag{A-7}$$

d'où l'expression de la section efficace :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_{\ell\ell'} e^{i2\pi\vec{\chi}\cdot(\vec{R}_\ell - \vec{R}_{\ell'})} \sum_{m\alpha} p_m p_\alpha \, b^*_{\ell'}(m,\alpha) \, b_\ell(m,\alpha) \quad . \tag{A-8}$$

Introduisons les notations suivantes :

$$\langle f(m,\alpha)\rangle_\alpha = \sum_\alpha p_\alpha f(m,\alpha) \quad , \tag{A-9}$$

$$\langle f(m,\alpha)\rangle_m = \sum_m p_m f(m,\alpha) \quad , \tag{A-10}$$

où f est une fonction des variables m et α.

Faisons l'hypothèse de non corrélation des informations α aux sites ℓ et ℓ' différents. Ainsi, p_α se factorise en $\prod_\ell p_{\alpha_\ell}$, où α_ℓ est l'information qui définit le site ℓ dans l'état α du réseau (par exemple l'orientation du spin du centre diffuseur en $\vec{R}_\ell$). La valeur moyenne, sur les états α du réseau, du produit $b^*_{\ell'}(m,\alpha)\, b_\ell(m,\alpha)$ s'écrit alors :

(A-11)

$$\langle b^*_{\ell'}(m,\alpha)\, b_\ell(m,\alpha)\rangle_\alpha = \langle b^*_{\ell'}(m,\alpha)\rangle_\alpha \langle b_\ell(m,\alpha)\rangle_\alpha + \delta_{\ell\ell'}\left(\langle |b_\ell(m,\alpha)|^2\rangle_\alpha - \langle b^*_{\ell'}(m,\alpha)\rangle_\alpha \langle b_\ell(m,\alpha)\rangle_\alpha\right).$$

Distinguons deux cas :

1 - Un centre diffuseur par maille : Réseau de Bravais.

Soit $\vec{a}_i$ (i = 1,2,3) les vecteurs définissant la maille. Le réseau est limité à un parallélépipède de cotés $(N_i - 1)\vec{a}_i$, le nombre total de sites est $N = N_1 N_2 N_3$.

En prenant comme origine un sommet du parallélépipède, un site $\vec{R}_\ell$ est défini par trois nombres entiers positifs ou nuls n^i_ℓ tels que,

$$\vec{R}_\ell = n^i_\ell \vec{a}_i \quad . \tag{A-12}$$

L'invariance, exacte à la limite d'un réseau infini, par translation de vecteur $\vec{t} = t^i \vec{a}_i$ (t^i entiers) implique que les valeurs moyennes $\langle b_\ell(m,\alpha)\rangle_\alpha$ et $\langle |b_\ell(m,\alpha)|^2\rangle_\alpha$ soient indépendantes de ℓ, notons les :

$$\overline{b(m)} = \langle b_\ell(m,\alpha)\rangle_\alpha \quad , \quad \overline{|b(m)|^2} = \langle |b_\ell(m,\alpha)|^2\rangle_\alpha \tag{A-13}$$

La section efficace (A-8), s'écrit alors comme la somme de deux termes :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = N\left(\langle |b(m)|^2\rangle_m - \langle |\overline{b}(m)|^2\rangle_m\right) + G(\vec{\chi})\langle |\overline{b}(m)|^2\rangle_m$$

$$\text{où} \quad G(\vec{\chi}) = \left|\sum_\ell e^{i2\pi \vec{\chi}\cdot\vec{R}_\ell}\right|^2 . \tag{A-14}$$

Le premier terme est isotrope, c'est la section efficace de diffusion incohérente.

Le deuxième terme, proportionnel à $G(\vec{\chi})$ est la section efficace de diffusion cohérente, correspondant aux interférences entre les ondes diffusées par tous les sites. A ce terme correspond les pics de diffraction de Bragg. En effet, montrons que la fonction $G(\vec{\chi})$ ne prend de valeurs notables que pour les points $\vec{\chi}$ voisins des noeuds du réseau réciproque.

Ce réseau est le transformé de Fourier du réseau initial, il est engendré par translation de la maille réciproque construite sur les vecteurs $\vec{b}_i$ de la base biorthogonale à la base $(\vec{a}_j)$ telle que :

$$\vec{a}_i \cdot \vec{b}_j = \delta_{ij} \qquad \text{avec} \qquad \vec{b}_1 = \frac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{(a_1\, a_2\, a_3)} \quad , \tag{A-15}$$

$\vec{b}_2$ et $\vec{b}_3$ étant obtenus par substitutions circulaires.

Soit h^i les composantes de $\vec{\chi}$ sur la base $(\vec{b}_i)$, $\vec{\chi}.\vec{R}_\ell$ s'écrit :

$$\vec{\chi} \cdot \vec{R}_\ell = h^i n_\ell^i \quad , \tag{A-16}$$

La somme, $\sum_\ell e^{i2\pi\vec{\chi}.\vec{R}_\ell}$, se factorise en trois termes, chacun étant la somme des N_i premiers éléments d'une série géométrique de raison $e^{i2\pi h^i}$, soit :

$$\sum_\ell e^{i2\pi\vec{\chi}.\vec{R}_\ell} = \prod_{i=1}^{3} \sum_{n_\ell^i=0}^{N_i-1} \left(e^{i2\pi h^i}\right)^{n_\ell^i} = \prod_{i=1}^{3} \frac{\sin \pi h^i N_i}{\sin \pi h^i}\, e^{i\pi h^i (N_i-1)} \quad . \tag{A-17}$$

On en déduit l'expression de $G(\vec{\chi})$:

$$G(\vec{\chi}) = \prod_{i=1}^{3} \frac{\sin^2 \pi h^i N_i}{\sin^2 \pi h^i} \tag{A-18}$$

Pour un point $\vec{\chi}$ voisin d'un noeud du réseau réciproque,

$$h^i = m^i + \varepsilon^i \qquad \text{avec } m^i \text{ entiers et} \qquad \varepsilon^i \ll 1 \quad , \tag{A-19}$$

la valeur de $G(\vec{\chi})$ est :

$$G(\vec{\chi}) = \prod_{j=1}^{3} \frac{\sin^2 \pi \varepsilon^j N_j}{\sin^2 \pi \varepsilon^j} \quad . \tag{A-20}$$

Quand $|\varepsilon| < \frac{1}{N}$ on a, $\frac{\sin^2 \pi \varepsilon N}{\sin^2 \pi \varepsilon} \simeq N^2 \left(\frac{\sin \pi \varepsilon N}{\pi \varepsilon N}\right)^2$; les variations de la fonction $(\sin x/x)^2$ sont représentées à la figure 16.

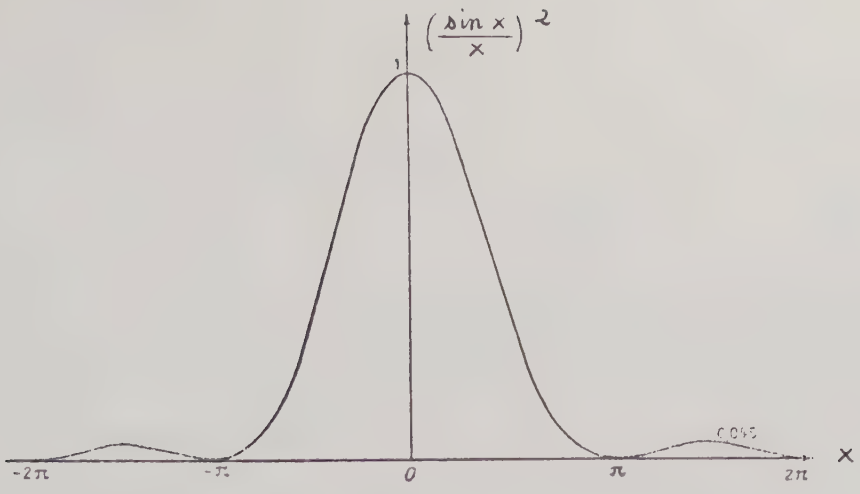


Figure 16 : Variations de $(\sin x/x)^2$.

La section efficace cohérente n'a donc de valeur notable que si les trois facteurs de (A-18) en ont une, c'est-à-dire lorsque simultanément $|\varepsilon_i| < 1/N_i$, $\quad i = 1,2,3.$

2 - Plusieurs sites par maille.

Considérons un réseau formé de M mailles comprenant chacune n sites repérés par :

$$\vec{R}_\ell = \vec{R}_{\mu i} = \vec{R}_\mu + \vec{r}_i \qquad \begin{cases} \vec{R}_\mu = m_\mu^k \vec{a}_k & m_\mu^k \text{ entiers} \\ \vec{r}_i = x_i^k \vec{a}_k & 0 \leq x_i^k < 1 \end{cases} \quad \text{(A-21)}$$

où $\vec{R}_\mu$ définit la position de la maille, et $\vec{r}_i$ celle du site dans la maille.

La section efficace (A-8) s'écrit alors :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_{\mu\mu'} e^{i2\pi\vec{\chi}.(\vec{R}_\mu - \vec{R}_{\mu'})} \sum_{ii'} e^{i2\pi\vec{\chi}.(\vec{r}_i - \vec{r}_{i'})} \sum_m p_m \langle b^*_{\mu' i'}(m,\alpha)\, b_{\mu i}(m,\alpha) \rangle_\alpha \,. \quad \text{(A-22)}$$

L'invariance par translation porte ici sur les mailles et non sur les sites. Par suite, la valeur moyenne $\langle b_{\mu i}(m,\alpha) \rangle_\alpha$ est indépendante de μ et non de i, posons encore :

$$\overline{b_i(m)} = \langle b_{\mu i}(m,\alpha) \rangle_\alpha \quad , \quad \overline{|b_i(m)|^2} = \langle |b_{\mu i}(m,\alpha)|^2 \rangle_\alpha \,. \quad \text{(A-23)}$$

D'où les expressions des sections efficaces incohérente et cohérente :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{incoh.} = M \sum_{i=1}^{n} \left(\langle \overline{|b_i(m)|^2} \rangle_m - \langle |\overline{b_i(m)}|^2 \rangle_m \right) , \quad \text{(A-24)}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{coh.} = G(\vec{\chi})\, \mathcal{F}(\vec{\chi}) \quad , \quad \text{(A-25)}$$

où $\mathcal{F}(\vec{\chi})$ est le facteur de structure :

$$\mathcal{F}(\vec{\chi}) = \sum_{i=1}^{n} \langle \overline{b_i(m)} \rangle_m \; e^{i 2\pi \vec{\chi}\cdot\vec{r}_i} \quad . \tag{A-26}$$

A.2. APPLICATIONS, PRINCIPE DES MESURES DE B.

Nous considérons pour simplifier un réseau à un site par maille.

a) Traitons comme premier exemple la diffusion par un réseau à N sites, formé d'un mélange de p isotopes, $N = \sum_{i=1}^{p} n_i$, où n_i est le nombre d'atomes d'isotopes i. Supposons de plus les longueurs de diffusion b_i, par les isotopes i, indépendantes de la projection m du spin des neutrons. Alors les valeurs moyennes sur les états α du réseau s'écrivent :

$$\langle b(\alpha) \rangle_\alpha = \sum_\alpha p_\alpha \, b(\alpha) = \sum_i \frac{n_i}{N} \, b_i = \overline{b} \quad ,$$

d'où l'expression de la section efficace (A-14) :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = N\left(\overline{|b|^2} - |\overline{b}|^2 \right) + G(\vec{\chi}) \, |\overline{b}|^2 \quad . \tag{A-27}$$

b) Considérons maintenant le cas de la diffusion dépendant du spin sur un réseau formé d'un seul isotope, les longueurs de diffusion supposées réelles sont de la forme (A-1) :

$$b_\ell(m,\alpha) = A + B \, \vec{I}_\ell \cdot \vec{\sigma} \quad . \tag{A-28}$$

Les valeurs moyennes sur les orientations des spins du réseau s'écrivent alors* :

$$\overline{b(m)} = A + B \, \sigma_3 \, I \, P \quad , \tag{A-29}$$

$$\overline{|b(m)|^2} = A^2 + B^2 \frac{I(I+1)}{4} - \frac{B^2}{2} \sigma_3 \, I P + 2AB \, \sigma_3 \, I P \quad , \tag{A-30}$$

où

$$P = \frac{\langle I_3 \rangle_\alpha}{I} \quad , \tag{A-31}$$

est la polarisation du réseau suivant un axe de quantification 3.

---

*Pour obtenir (A-30) on utilise :

$$(\vec{I}\cdot\vec{\sigma})^2 = \frac{1}{4}(\vec{I}\cdot\vec{\sigma})^2 = \frac{1}{4}\left(\vec{I}^2 + i\,\vec{\sigma}\cdot\vec{I}\times\vec{I}\right) = \frac{1}{4}\left(\vec{I}^2 - \vec{\sigma}\cdot\vec{I}\right) \quad .$$

Explicitons les valeurs moyennes intervenant dans l'expression de la section efficace (A-14) :

$$\langle |\overline{b(m)}|^2 \rangle_m = A^2 + B^2 \frac{I^2}{4} P^2 + AB\, I P p \,, \qquad \text{(A-32)}$$

$$\overline{\langle |b(m)|^2 \rangle_m} = A^2 + B^2 \frac{I(I+1)}{4} + \left(AB - \frac{B^2}{4}\right) I P p \,, \qquad \text{(A-33)}$$

où $$p = \frac{\langle \lambda_3 \rangle_m}{1/2} \qquad \text{(A-34)}$$

est la polarisation des neutrons incidents suivant l'axe 3.

Nous en déduisons les valeurs des sections efficaces incohérente et cohérente :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{incoh.} = N\left[B^2 \frac{I(I+1)}{4} - B^2 \frac{I^2}{4} P^2 - B^2 \frac{I}{4} P p\right], \qquad \text{(A-35)}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{coh.} = G(\vec{\chi})\left[A^2 + B^2 \frac{I^2}{4} P^2 + AB\, I P p\right]. \qquad \text{(A-36)}$$

c) Appelons intensité $\mathcal{I}$ la dépendance en A et B de la section efficace cohérente :

$$\mathcal{I} = A^2 + B^2 \frac{I^2}{4} P^2 + AB\, I P p \,. \qquad \text{(A-37)}$$

On voit que :

1- si les noyaux ne sont pas polarisés (P = 0), l'intensité se réduit au terme A^2,

2- si les noyaux sont polarisés (P ≠ 0) mais les neutrons ne le sont pas (p = 0) l'intensité comporte en plus le terme en B^2,

3- si les noyaux et les neutrons sont simultanément polarisés, les trois termes figurent dans l'expression de l'intensité permettant alors de mesurer le terme B en grandeur et en signe. C'est la méthode utilisée pour le F^{19} [4].

En principe il n'est pas nécessaire d'avoir une cible polarisée pour mesurer B^2, ce terme figurant dans l'expression de la section efficace incohérente même si P = p = 0. Cependant cette section efficace, obtenue par différence entre la section efficace totale de diffusion et la section efficace de diffusion cohérente, donne B^2 avec une précision souvent médiocre (voire très mauvaise dans le cas du F^{19} [4]).

Ce qui précède suppose l'absence de magnétisme d'origine électronique. Si celui-ci était présent, la longueur de diffusion comporterait un terme supplémentaire, soit à l'approximation de Born :

$$b = A + B\,\vec{I}\cdot\vec{s} - \frac{2m_n}{\hbar^2}\,\vec{\mu}_n\cdot\vec{\mu}\quad , \qquad \text{(A-38)}$$

où $\vec{\mu}_n$ est la composante du moment magnétique du neutron perpendiculaire au plan de diffusion et $\vec{\mu}$ le moment magnétique du cortège électronique du noyau cible.

En reprenant les développements précédents, on voit que B peut également être mesuré par interférence entre les trois termes[5], ou bien entre les deux derniers[6], pourvu que P soit non nul.

Indiquons enfin que l'analogie magnétique pour la diffusion nucléaire (pseudo-magnétisme nucléaire[1](III.1.1))a permis de nouvelles méthodes de mesure de B[7].

B. GENERALITES SUR LES REPRESENTATIONS DU GROUPE DES ROTATIONS

L'invariance par rotation d'un système isolé étant constamment utilisée dans ce travail, nous rappelons la démarche adoptée pour construire les représentations irréductibles du groupe des rotations en insistant sur les problèmes suivants :

- dépendance dans un choix d'axes,
- équivalence des représentations $\mathscr{D}^j$ et $\mathscr{D}^{j*}$, variance,
- grandeurs tensorielles et théorème de Wigner-Eckart.

B.1. GENERALITES SUR LES SYMETRIES.[45]

Pour décrire un système physique en Mécanique Quantique, on introduit un espace de Hilbert $\mathscr{H}$. A tout état du système, on associe un opérateur densité D auto-adjoint défini positif, et de trace unité dans $\mathscr{H}$. Toute grandeur physique mesurable expérimentalement (une observable) est associée à un opérateur auto-adjoint A. La valeur moyenne de cette observable dans l'état D est définie par TrDA.

Nous considérons uniquement des "cas purs", c'est à dire des états pour lesquels l'opérateur D est un projecteur,

$$D = |\Psi\rangle\langle\Psi| \quad , \tag{B-1}$$

sur un rayon $|\underline{\Psi}\rangle$, ensemble des vecteurs $|\psi'\rangle = e^{i\varphi}|\psi\rangle$ définis à une phase près.

Une condition de présymétrie $\mathscr{S}$ est satisfaite si à tout état physique D et à toute observable A correspond un état physique ${}^{\mathscr{S}}D$ et une observable ${}^{\mathscr{S}}A$, et inversement tout état et toute observable est l'image par $\mathscr{S}$ d'un état et d'une observable, telle que :

$$Tr\ DA = Tr\ {}^{\mathscr{S}}D\ {}^{\mathscr{S}}A \quad . \tag{B-2}$$

Une telle transformation conserve les probabilités de transition :

$$|\langle\Psi|\Psi'\rangle|^2 = |\langle {}^{\mathscr{S}}\Psi|\ {}^{\mathscr{S}}\Psi'\rangle|^2 \quad . \tag{B-3}$$

Le théorème de Wigner[46] prouve l'existence d'un opérateur $U(\mathscr{S})$ unitaire ou antiunitaire, défini à une phase près qui engendre cette transformation :

si $\quad |\Psi\rangle \in |\underline{\Psi}\rangle \quad \Longrightarrow \quad U(\mathscr{S})|\Psi\rangle \in {}^{\mathscr{S}}|\underline{\Psi}\rangle$.

Dans le cas des rotations, on considère un ensemble de transformations $\mathcal{S}$: le groupe SO(3) des rotations R. L'ensemble des opérateurs U(R) unitaires (car SO(3) est connexe) forment une représentation à une phase près de ce groupe. On démontre[47] que toute représentation de ce type est une représentation vraie, continue et unitaire de son groupe de recouvrement universel SU(2).

B.2. REPRESENTATIONS UNITAIRES DE SU(2).

B.2.1. Algèbre de Lie de SU(2).

a) Un groupe de Lie connexe est déterminé par son voisinage de l'unité. Les éléments de SU(2) voisins de l'unité sont du type,

$$U = \mathbb{1} - i W \quad , \tag{B-4}$$

où W est une matrice 2 × 2 sur C, hermitique et de trace nulle. L'ensemble ω de ces matrices est muni de la structure d'algèbre de Lie (de SU(2)) sur R à l'aide de l'application bilinéaire de $\omega \times \omega$ dans ω :

$$i [W, W'] = W'' \quad . \tag{B-5}$$

Cette application est entièrement définie par l'image d'une base quelconque (W_i) de ω :

$$[W_i , W_j] = i C_{ijk} W_k \quad , \tag{B-6}$$

où les C_{ijk} sont les constantes de structure réelles (analogues aux éléments de matrice) de l'algèbre ω sur la base (W_i). Un choix particulier de base est celui des matrices de Pauli :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \tag{B-7}$$

pour lequel les constantes de structure sont :

$$[\sigma_i , \sigma_j] = i 2 \varepsilon_{ijk} \sigma_k \quad . \tag{B-8}$$

b) On démontre, que pour toute représentation unitaire et continue $\mathcal{D}(U)$ de SU(2) sur un espace $\mathcal{H}$, l'ensemble des opérateurs J définis sur $\mathcal{H}$ par

$$\mathcal{D}(\mathbb{1} - i W) = \mathbb{1} - i J \quad , \tag{B-9}$$

forment une algèbre identique à ω . Pour un choix de base (J_i) de $\mathcal{H}$, correspondant à (W_i) par :

$$\mathcal{D}(\mathbb{1} - i \varepsilon_i W_i) = \mathbb{1} - i \varepsilon_i J_i \quad , \tag{B-10}$$

les constantes de structure sont identiques à (B-6) :

$$[J_i , J_j] = i C_{ijk} J_k \quad . \tag{B-11}$$

Il est d'usage, par rapport à la base (σ_i) de ω, de définir les J_i par :

$$\mathcal{D}(\mathbb{1} - i\varepsilon_i \sigma_i) = \mathbb{1} - i 2 \varepsilon_i J_i \quad , \tag{B-12}$$

où les J_i satisfont les relations de commutation habituelles :

$$[J_i , J_j] = i \varepsilon_{ijk} J_k \quad . \tag{B-13}$$

B.2.2. Correspondance entre SU(2) et SO(3).

On démontre qu'à tout élément U de SU(2) on associe une rotation R(U), définie par :

$$\vec{r}' = R(U)\vec{r} \qquad \vec{r}\cdot\vec{\sigma} = U \vec{r}\cdot\vec{\sigma} U^{-1} \quad . \tag{B-14}$$

Aux matrices U et -U, correspond la même rotation R ; SO(3) est isomorphe au quotient de SU(2) par le sous-groupe invariant formé par $\mathbb{1}$ et $-\mathbb{1}$. Toute matrice U de SU(2) peut se mettre sous la forme :

$$U(\theta, \hat{n}) = \cos\frac{\theta}{2}\,\mathbb{1} - i \sin\frac{\theta}{2}\,\hat{n}\cdot\vec{\sigma} = e^{-i\frac{\theta}{2}\hat{n}\cdot\vec{\sigma}} \quad , \tag{B-15}$$

où θ est un angle réel appartenant à $[0,2\pi]$ et $\hat{n}$ un vecteur unitaire réel.

A $U(\theta,\hat{n})$ correspond, par (B-14), la rotation $R(\theta,\hat{n})$ d'angle θ et d'axe $\hat{n}$.

B.2.3. Représentations unitaires irréductibles de SU(2) .

a) Suivant Bargmann[48], un choix particulier de représentation conduit directement aux représentations irréductibles de SU(2). Pour cela considérons les espaces $\mathcal{E}_j$ de dimension $2j+1$ ($2j$ entier ≥ 0) des polynômes homogènes et de degré $2j$ en ξ et η , où ξ et η sont les composantes d'un spineur complexe $\zeta = \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$. Ces espaces $\mathcal{E}_j$ sont munis de la structure hermitienne à l'aide du produit

$$(f, g) = \frac{1}{\pi^2}\int d\zeta^+ d\zeta\, e^{-\zeta^+\zeta} f^*(\zeta)\, g(\zeta) \quad . \tag{B-16}$$

Les vecteurs v_m^j :

$$v_m^j(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}\, \xi^{j+m}\, \eta^{j-m} \qquad m = -j, \cdots, j \tag{B-17}$$

forment une base orthonormée de $\mathcal{E}_j$.

La représentation est définie de la façon suivante : à tout U de SU(2) on associe une transformation T_U agissant sur les espaces $\mathcal{E}_j$ telle que :

$$f \xrightarrow{T_U} T_U f \quad , \quad (T_U f)(\zeta) = f(U^t \zeta) \quad . \tag{B-18}$$

Cette représentation est unitaire. La représentation matricielle de T_U sur la base (v^j_m) définit les matrices de rotation $\mathscr{D}^j(U)$:

$$T_U \, v^j_m = v^j_{m'} \, \mathcal{D}^j_{m',m}(U) \quad . \tag{B-19}$$

Le résultat de l'action des générateurs J_i (associés aux σ_i par (B-12)) de cette représentation sur la base (v^j_m) s'obtient directement :

$$\begin{aligned} J_3 \, v^j_m &= m \, v^j_m \\ J_\pm \, v^j_m &= (J_1 \pm i J_2) \, v^j_m = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} \; v^j_{m \pm 1} \\ \vec{J}^2 \, v^j_m &= j(j+1) \, v^j_m \quad . \end{aligned} \tag{B-20}$$

b) On démontre[46] que ces représentations $\mathscr{D}^j$ sont irréductibles et complètes (à une équivalence près, il n'existe pas d'autre représentation irréductibles de SU(2)). Par suite toutes les propriétés (B-20) s'étendent à toutes les représentations irréductibles unitaires et continues de SU(2) sur un espace $\mathscr{H}$.

c) La réduction du produit direct de deux représentations irréductibles s'effectue[48] en cherchant tous les scalaires contenus dans la représentation $\mathscr{D}^{j1} \otimes \mathscr{D}^{j2} \otimes \mathscr{D}^{j3}$.

B.3. DEPENDANCE EN UN CHOIX D'AXES.

L'algèbre de Lie ω de SU(2) est intrinsèque, c'est à dire indépendante de tout choix de base. Par contre, la définition des générateurs J_i d'une représentation sur un espace $\mathscr{H}$ est liée au choix de base dans ω par (B-12).

Considérons les J_i comme les composantes d'un vecteur $\vec{J}$ sur 3 axes orthonormés directs de vecteurs unitaires $\hat{a}_i$ et notés globalement [a], soit :

$$\vec{J} = J_i \, \hat{a}_i \quad . \tag{B-21}$$

L'algèbre des générateurs J_i, identique à ω, est également intrinsèque. Notre but est de donner ce caractère intrinsèque au vecteur $\vec{J}$.

Pour cela, considérons la représentation de SU(2) sur l'algèbre elle-même, (représentation adjointe) définie de la façon suivante : à tout U de SU(2), on associe un opérateur $\mathcal{O}(U)$ agissant sur ω tel que :

$$U(1 - iW)U^{-1} = 1 - i\mathcal{O}(U)W \, , \tag{B-22}$$

soit :

$$\mathcal{O}(U)\, W = U\, W\, U^{-1} \quad . \tag{B-23}$$

La représentation matricielle de $\mathcal{O}(U)$ sur la base (σ_i) est identique à SO(3) en effet,

$$U\, \sigma_i\, U^{-1} = \mathcal{O}(U)\, \sigma_i = \sigma_j\, R_{ji}(U) \quad , \tag{B-24}$$

où $R_{ji}(U)$ sont les éléments de matrice de la rotation R(U) correspondant à U par (B-14).

La nouvelle base $(\sigma'_i = \sigma_j R_{ji}(U))$ de ω définit par l'équation (B-12) les nouveaux générateurs J'_i :

$$J'_i = J_j\, R_{ji}(U) = \mathcal{D}(U)\, J_i\, \mathcal{D}^{-1}(U) \quad , \tag{B-25}$$

la dernière expression est obtenue en prenant l'image de (B-22) dans la représentation considérée. Les nouveaux générateurs J'_i sont les composantes du vecteur $\vec{J}$ défini en (B-21), sur les axes $\hat{a}'_i$ obtenus par rotation des axes $\hat{a}_i$, en effet :

$$\vec{J} = J'_i\, \hat{a}'_i = J_j\, R_{ji}(U)\, \hat{a}'_i \quad , \tag{B-26}$$

soit

$$\hat{a}'_i = \hat{a}_j\, R_{ji}(U) \qquad \text{ou} \qquad [a'] = R(U)\,[a] \quad . \tag{B-27}$$

Dans l'espace de représentation $\mathcal{H}$, la base irréductible, notée ($|jm\rangle$) (l'image dans la représentation considérée de la base (v^j_m) (B-17)), est liée au choix des générateurs. Pour rappeler cette dépendance, on indique les axes adoptés [a] dans la notation des vecteurs de la base irréductible de $\mathcal{H}$ par $|[a]jm\rangle$.

Avec cette notation, on démontre en utilisant (B-25) que :

$$\mathcal{D}(U)\,|[a]\; j\, m\rangle = |\, R(U)[a]\; j\, m\rangle \quad . \tag{B-28}$$

Ainsi, par rotation R de l'état jm défini par rapport aux axes [a] , on obtient encore un état jm mais défini par rapport aux axes R[a] tournés dans la même rotation ; c'est la traduction physique de la condition de présymétrie par rotation.

B.4. GRANDEURS TENSORIELLES, EQUIVALENCE DES REPRESENTATIONS $\mathscr{D}^j$ ET $\mathscr{D}^{j*}$.

B.4.1. Définition d'une grandeur tensorielle.

Une grandeur tensorielle g, d'ordre p et de rangs $j_1,\ldots,j_p$, est caractérisée par un ensemble de composantes dépendant de p indices $m_1,\ldots,m_p$, et se transformant par rotation R suivant :

$$g^{j_1\cdots j_p}_{m_1\cdots m_p} \xrightarrow{R} {}^{R}g^{j_1\cdots j_p}_{m_1\cdots m_p} = g^{j_1\cdots j_p}_{m'_1\cdots m'_p}\, \mathscr{D}^{j_1}_{m'_1 m_1}(R)\cdots\mathscr{D}^{j_p}_{m'_p m_p}(R) \quad . \tag{B-29}$$

La nature de la grandeur considérée (fonction, opérateur...) importe peu, seule sa loi de transformation, c'est à dire son caractère tensoriel nous intéresse.

B.4.2. Equivalence des représentations $\mathscr{D}^j$ et $\mathscr{D}^{j*}$, variance.

a) Pour rappeler quelques résultats sur les représentations matricielles réelles ou complexes[46], considérons une représentation matricielle unitaire $\mathscr{M}(G)$ d'un groupe G. L'ensemble $\mathscr{M}^*(G)$ des matrices conjuguées complexes de $\mathscr{M}(G)$ est aussi une représentation de G. Ces deux représentations sont équivalentes si et seulement si le caractère des représentations c'est à dire la trace des matrices est réelle. Dans ce cas, il existe une matrice unitaire $\mathscr{C}$, telle que pour tout élément g du groupe :

$$\mathscr{C}\,\mathscr{M}(g) = \mathscr{M}^*(g)\,\mathscr{C} \quad . \tag{B-30}$$

Si $\mathscr{M}(G)$ est irréductible, le lemme de Schur permet de montrer que $\mathscr{C}$ est définie à une phase près et, symétrique ou antisymétrique. Lorsque $\mathscr{C}$ est symétrique on peut se ramener à des représentations matricielles réelles, la représentation est dite réelle ; sinon elle est dite complexe.

Pour le groupe SU(2) à caractère réel, les représentations sont complexes. En effet, pour tout élément U de SU(2) :

$$U^* = C\,U\,C^{-1} \quad \text{avec} \quad C = i\,\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{B-31}$$

La matrice de passage entre les deux représentations équivalentes $\mathscr{D}^j$ et $\mathscr{D}^{j*}$ est, à une phase près, la matrice antisymétrique $\mathscr{D}^j(C)$ telle que,

$$\mathscr{D}^{j}_{m'm}(C) = (-)^{j+m}\,\delta_{m',-m} \quad . \tag{B-32}$$

Elle correspond à une rotation de π autour de l'axe 2.

b) On étend la notion de grandeur tensorielle (B-29) en introduisant une variance qui caractérise le fait qu'un indice m se transforme par rotation suivant l'une ou l'autre des représentations $\mathscr{D}^j$ et $\mathscr{D}^{j*}$. Reprenant une notation de Fano et Racah[49], nous notons : $\overset{[j]}{m}$ les indices de la représentation $\mathscr{D}^j$ et $\overset{(j)}{m}$ ceux de $\mathscr{D}^{j*}$.

Par exemple, $(g^{(j_1)\,[j_2]\,[j_3]}_{m_1\ m_2\ m_3})$ sont les composantes d'un tenseur d'ordre 3 qui se transforme par une rotation R suivant :

$$ {}^{R}g^{(j_1)\,[j_2]\,[j_3]}_{m_1\ m_2\ m_3} = g^{(j_1)\,[j_2]\,[j_3]}_{m'_1\ m'_2\ m'_3}\ \mathscr{D}^{j_1 *}_{m'_1 m_1}(R)\ \mathscr{D}^{j_2}_{m'_2 m_2}(R)\ \mathscr{D}^{j_3}_{m'_3 m_3}(R) \quad . \tag{B-33} $$

Une grandeur tensorielle est intrinsèque, c'est à dire définie indépendamment de la variance de ses composantes. Le changement de variance d'un indice j est réalisé par la matrice de passage $\mathscr{D}^j(C)$ suivant :

$$ \overset{(j)}{m} = \mathscr{D}^{j}(C)\ \overset{[j]}{m} = C_{jm}\ \overset{[j]}{-m} \qquad \text{avec} \quad C_{jm} = (-)^{j+m} $$

$$ \overset{[j]}{m} = C_{j-m}\ \overset{(j)}{-m} \quad . \tag{B-34} $$

La valeur de C_{jm} correspond au choix de C comme matrice de passage, en choisissant -C, $C_{jm} = (-)^{j-m}$.

Remarques : - Seuls les indices de même variance peuvent être couplés à l'aide des coefficients de Clebsch-Gordan réels usuels.

- La loi de transformation des indices (B-34) est stable vis-à-vis du couplage.

B.4.3. Applications.

a) En Mécanique Quantique, les grandeurs tensorielles considérées sont des vecteurs $|[j]m\rangle$, des fonctions d'onde $\varphi^{[j]}_m$ et des opérateurs tensoriels irréductibles $\mathcal{O}^{[j]}_m$. Ces grandeurs appartiennent toutes par définition à la représentation $\mathscr{D}^j$. Pour chacune d'elles on peut effectuer respectivement les transformations suivantes : image dans le dual d'un ket (bra), conjugaison complexe d'une fonction d'onde et conjugaison hermitique d'un opérateur. Ces trois transformations, indiquées globalement par x ($g \overset{x}{\to} g^x$), sont antilinéaires et satisfont la relation :

$$ ({}^{R}g)^{x} = {}^{R}(g^{x}) \quad . \tag{B-35} $$

par suite g^x se transforme par rotation suivant :

$$ {}^{R}\left(g^{[j]\,x}_{m}\right) = \left({}^{R}g^{[j]}_{m}\right)^{x} = g^{[j]\,x}_{m'}\ \mathscr{D}^{j*}_{m'm}(R) \quad . \tag{B-36} $$

Les transformations x associent donc à tout tenseur g , défini par ses composantes $g^{[j]}_m$ dans la représentation $\mathscr{D}^j$, un nouveau tenseur g^* dont les composantes dans la représentation $\mathscr{D}^{j*}$ sont définies par :

$$g^{x\,(j)}_{\ m} \equiv g^{[j]\,x}_{\ m} \quad ; \tag{B-37}$$

le symbole x placé à gauche de la variance n'a plus sa signification initiale, il rappelle l'origine de $g^{x(j)}_m$.

b) Dans les cas de la conjugaison complexe d'une fonction et de la conjugaison hermitique d'un opérateur, déterminons la condition nécessaire et suffisante pour que $g^x = g$. La condition nécessaire s'obtient en écrivant l'égalité des composantes de même variance, soit :

$$g^{[j]}_m = g^{x\,[j]}_{\ m} = C_{j-m}\, g^{x\,(j)}_{\ -m} = C_{j-m}\, g^{[j]\,x}_{-m} , \tag{B-38}$$

ou

$$g^{[j]\,x}_m = C_{j-m}\, g^{[j]}_{-m} \quad . \tag{B-39}$$

Cette condition qui est également suffisante, ne peut être satisfaite que pour j entier, en effet la transformation x est involutive et donc,

$$g^{[j]}_m = \left(g^{[j]\,x}_m \right)^x = C_{j-m}\, g^{[j]\,x}_{-m} = C_{j-m} C_{jm}\, g^{[j]}_m = (-)^{2j} g^{[j]}_m \tag{B-40}$$

Par définition un opérateur tensoriel irréductible est hermitique s'il satisfait la condition (B-39). (le mot hermitique s'applique ici à l'opérateur tensoriel, ensemble de 2j+1 opérateurs).

Les harmoniques sphériques que nous utilisons (C.2a), satisfont cette condition (B-39), soit :

$$Y^{[\ell]}_m(\theta,\varphi) \equiv \langle [a]\,\theta,\varphi \,|\, [a]\,\ell m \rangle = (-i)^\ell\, Y_{\ell m}(\theta,\varphi) , \tag{B-41}$$

où $Y_{\ell m}$ sont les harmoniques sphériques usuelles[50] .

Les composantes standards d'un opérateur tensoriel <u>hermitique</u> de rang 1 (opérateur vectoriel $\vec{V}$) sont :

$$V^{[1]}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (i V_1 - V_2) \quad , \quad V^{[1]}_0 = -i V_3 \quad , \quad V^{[1]}_{-1} = \frac{-1}{\sqrt{2}} (i V_1 + V_2) . \tag{B-42}$$

Les produits scalaires et vectoriels s'expriment alors de la façon suivante :

$$\vec{V} \cdot \vec{W} = \sqrt{3} \left(V^{[1]}\, W^{[1]} \right)^{[0]}_0 \quad ,$$

$$\left(\vec{V} \times \vec{W} \right)^{[1]}_m = \sqrt{2} \left(V^{[1]}\, W^{[1]} \right)^{[1]}_m \quad . \tag{B-43}$$

c) Application aux opérateurs de création et d'annihilation. L'opérateur a^{+}_{jm} crée à partir du vide un état $|[j]m\rangle$ de la représentation $\mathscr{D}^{j}$, pour mettre en évidence la variance de cet opérateur, nous le notons

$$p^{[j]}_{m} \equiv a^{+}_{jm} \quad . \tag{B-44}$$

L'annihilateur d'une particule dans l'état $|[j]m\rangle$ est l'opérateur a_{jm} conjugué hermitique de a^{+}_{jm}. C'est un opérateur de la représentation $\mathscr{D}^{j*}$, soit avec la notation (B-37) :

$$a_{jm} = p^{[j]+}_{m} = p^{+(j)}_{m} \quad . \tag{B-45}$$

On définit l'opérateur tensoriel créateur de trou t par :

$$t \equiv p^{+} , \tag{B-46}$$

par suite :

$$a_{jm} = t^{(j)}_{m} = C_{jm}\, t^{[j]}_{-m} , \tag{B-47}$$

ou encore :

$$t^{[j]}_{m} = C_{j-m}\, a_{j-m} \quad . \tag{B-48}$$

Cet opérateur $t^{[j]}_{m}$ crée un état de trou appartenant à la représentation $\mathscr{D}^{j}$.

Un état particule-trou $|(j_1 j_2^{-1})[J]M\rangle$ est obtenu par couplage des opérateurs $p^{[j_1]}_{m_1}$ et $t^{[j_2]}_{m_2}$ de même variance, soit :

$$\begin{aligned} \left(p^{[j_1]}\, t^{[j_2]}\right)^{[J]}_{M} &= \sum_{m_1 m_2} (j_1 j_2 m_1 m_2 | JM)\; p^{[j_1]}_{m_1}\; t^{[j_2]}_{m_2} \\ &= \sum_{m_1 m_2} (j_1 j_2 m_1 m_2 | JM)\, C_{j_2 - m_2}\, a^{+}_{j_1 m_1}\, a_{j_2 - m_2} \quad . \end{aligned} \tag{B-49}$$

B.5. GRANDEURS TENSORIELLES INVARIANTES, THEOREME DE WIGNER-ECKART.

B.5.1. Théorème de Wigner-Eckart.

a) Etablissons que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une grandeur tensorielle d'ordre 1, g^{j} , soit invariante par rotation est j=0.

La condition est clairement suffisante, pour démontrer qu'elle est nécessaire, considérons une telle grandeur invariante :

$$R\, g^{[j]}_{m} = g^{[j]}_{m'}\, \mathcal{D}^{j}_{m'm}(R) = g^{[j]}_{m} \quad . \tag{B-50}$$

Cette relation étant vraie pour tout R et le groupe étant compact, l'intégration de (B-50) sur les paramètres du groupe donne j=0.

b) La représentation étant unitaire, tout élément de matrice $\langle j_1 m_1 | \mathcal{O}^{j_2}_{m_2} | j_3 m_3 \rangle$ d'un opérateur tensoriel irréductible sur une base irréductible est la composante $g^{(j_1)[j_2][j_3]}_{m_1\ m_2\ m_3}$ d'une grandeur tensorielle invariante. Le développement de cette grandeur en fonction de ses composantes couplées se limite donc aux termes couplés globalement à J=0. Le couplage à l'aide des coefficients de Clebsch-Gordan nécessite que les 3 indices soient de même variance, d'où :

$$\langle j_1 m_1 | \mathcal{O}^{j_2}_{m_2} | j_3 m_3 \rangle = C_{j_1 m_1}\ g^{[j_1]\ [j_2]\ [j_3]}_{-m_1\ \ m_2\ \ m_3}$$

$$= C_{j_1 m_1} (j_1 j_1 -m_1 m_1 | 00)(j_2 j_3 m_2 m_3 | j_1 m_1)\ g^{([j_1][j_2][j_3])[0]} \quad . \qquad \text{(B-51)}$$

Par définition $g^{([j_1][j_2][j_3])[0]}$, correspondant uniquement au couplage des 3 indices de la représentation $\mathscr{D}^j$, à J=0, est l'élément de matrice réduit $[j_1 || \mathcal{O}^{j2} || j_3]$ du théorème de Wigner-Eckart suivant* (avec $C_{jm} = (-)^{j+m}$) :

$$\langle j_1 m_1 | \mathcal{O}^{j_2}_{m_2} | j_3 m_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2j_1+1}} (j_2 j_3\ m_2 m_3 | j_1 m_1)\ [j_1 \| \mathcal{O}^{j_2} \| j_3] \quad . \qquad \text{(B-52)}$$

c) Donnons la valeur de quelques éléments de matrice réduits définis comme ci-dessus (α désigne l'ensemble des nombres quantiques supplémentaires nécessaires pour définir un état) :

$$[\alpha j \| \mathbb{1} \| \alpha' j'] = \hat{j}\ \delta_{jj'}\ \delta_{\alpha\alpha'}$$

$$[\alpha j \| J^{[1]} \| \alpha' j'] = i\sqrt{j(j+1)(2j+1)}\ \delta_{jj'}\ \delta_{\alpha\alpha'}$$

$$[1/2 \| \sigma^{[1]} \| 1/2] = i\sqrt{6}$$

$$[\ell_1 \| Y^{[\ell_2]} \| \ell_3] = (-)^{\frac{1}{2}(\ell_1+\ell_2+\ell_3)} \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\ \hat{\ell}_1\ \hat{\ell}_2\ \hat{\ell}_3 \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(B-53)}$$

avec $\hat{j} = \sqrt{2j+1}$.

B.5.2. Une formule de réduction du produit tensoriel.

Soit $\mathcal{O}^{j_3}_{(1)}$ et $\mathcal{O}^{j_4}_{(2)}$ deux opérateurs tensoriels agissant séparément sur les variables 1 et 2. Exprimons l'élément de matrice réduit $[(j_1(1)j_2(2))J_{12} || (\mathcal{O}^{j_3}_{(1)} \mathcal{O}^{j_4}_{(2)})J_{34} ||\ (j_5(1)j_6(2))J_{56}]$, en fonction du produit des deux éléments

---

*Les éléments de matrice réduits définis par (B-52) diffèrent de ceux habituellement adoptés : par rapport aux éléments de matrice réduits de Messiah [50] $\langle || \ || \rangle$, nous avons :

$$[j_1 \| \mathcal{O}^{j_2} \| j_3] = (-)^{j_1 + j_2 - j_3} \langle j_1 \| \mathcal{O}^{j_2} \| j_3 \rangle \quad .$$

de matrice réduits correspondant respectivement aux variables 1 et 2.

Par définition (B-52), un tel élément de matrice réduit est une grandeur tensorielle du type :

$$g = g^{\{([j_1][j_2])J_{12}\,([j_3][j_4])J_{34}\,([j_5][j_6])J_{56}\}0} .$$

Tous les indices étant de même variance on peut changer leurs couplages au moyen des coefficients de Clebsch-Gordan ou directement à l'aide des " 9j carrés" (B.6), de la façon suivante :

$$g = \sum_{\alpha\beta\gamma} \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ \alpha & \beta & J_{56} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta & J_{56} \\ j_5 & j_6 & J_{56} \\ \gamma & \gamma & 0 \end{bmatrix} g^{\{((j_1 j_3)\alpha, j_5)\gamma, ((j_2 j_4)\beta, j_6)\gamma\}0} . \qquad \text{(B-54)}$$

Exploitant la nature matricielle de la grandeur tensorielle considérée, la structure $((j_1 j_3)\alpha, j_5)\gamma$ apparait comme un élément de matrice pour la variable 1, c'est à dire un invariant ; par suite $\gamma = 0$, $\alpha = j_5$ et $\beta = j_6$. D'où la formule de réduction du produit tensoriel :

$$[(j_1(1)\; j_2(2))J_{12} \,\|\, (O^{j_3}_{(1)}\; O^{j_4}_{(2)} \,\|\, (j_5(1)\; j_6(2))J_{56}]$$

$$= \frac{\hat{J}_{56}}{\hat{j}_5\;\hat{j}_6} \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ j_5 & j_6 & J_{56} \end{bmatrix} [j_1 \| O^{j_3} \| j_5]\,[j_2 \| O^{j_4} \| j_6] . \qquad \text{(B-55)}$$

B.6. COEFFICIENTS "9j CARRES", TECHNIQUE GRAPHIQUE.

B.6.1. Définition et propriétés des "9j carrés".

a) Les "9j carrés" sont les coefficients de la transformation unitaire qui change les couplages de quatre indices de même variance de la facon suivante :

$$\{(j_1 j_2)J_{12}, (j_3 j_4)J_{34}\}JM = \sum_{J_{13}\,J_{24}} \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_{13} & J_{24} & J \end{bmatrix} \{(j_1 j_3)J_{13}, (j_2 j_4)J_{24}\}JM . \qquad \text{(B-56)}$$

b) Ces coefficients sont reliés aux coefficients 9j de Wigner[46] par :

$$\begin{bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_{13} & J_{24} & J \end{bmatrix} = \hat{J}_{12}\,\hat{J}_{34}\,\hat{J}_{13}\,\hat{J}_{24} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_{13} & J_{24} & J \end{Bmatrix} , \qquad \text{(B-57)}$$

avec $\hat{J}. = \sqrt{2j+1}$.

Ils sont symétriques par rapport à la première diagonale ([\]) mais pas par rapport à la deuxième.

Ils sont multipliés par $(-)^S$ dans l'échange des deux premières lignes ou des deux premières colonnes, S étant la somme des 9 valeurs de j.

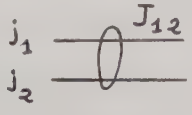
B.6.2. Technique graphique.

a) Indiquons brièvement une technique graphique due à M. Danos [51] qui permet de visualiser les changements de couplage effectués à l'aide des "9j carrés".

- Un indice j est représenté par une ligne. Un ensemble d'indices couplés peut être traité comme un indice unique dans la mesure où les couplages internes ne sont pas affectés.

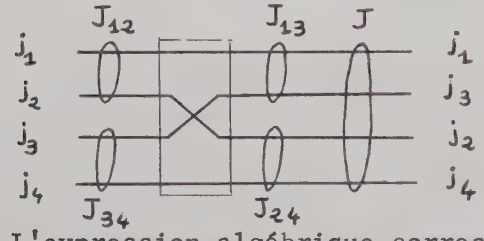
- Le couplage de plusieurs indices est noté par un anneau entourant les lignes correspondantes.

- L'ordre du couplage est celui des lignes lues de haut en bas :



$$\equiv \quad (j_1\, j_2)\, J_{12} \quad . \qquad \text{(B-58)}$$

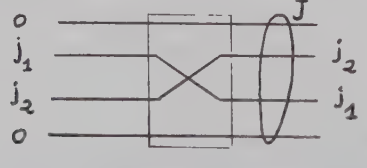
- Les "9j carrés" sont représentés par une "boîte" dans laquelle les 4 lignes se croisent de la façon suivante :



$$\equiv \quad \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_{13} & J_{24} & J \end{bmatrix} \quad . \qquad \text{(B-59)}$$

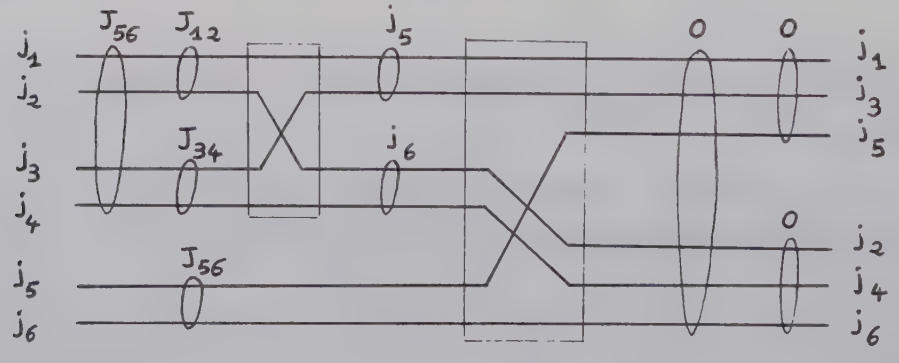
- L'expression algébrique correspondant à un graphique s'obtient en associant à chaque "croisement" du type (B-59) un "9j carré", et en rétablissant les sommations sur les couplages intermédiaires.

Remarque : afin d'utiliser uniquement des "9j carrés", l'introduction de systèmes fictifs couplés à j = 0 permet de rendre compte du changement de l'ordre du couplage de 3 indices, voire de deux :



$$\equiv \quad (-)^{j_1 + j_2 - J} \quad . \qquad \text{(B-60)}$$

b) A titre d'exemple, donnons la représentation graphique de la formule de réduction du produit tensoriel (B-55) :



B.6.3. Valeurs particulières de "9j carrés".

$\widehat{j} = \sqrt{2j+1}$

Expression en fonction du 9 j de Wigner

$$\begin{bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_{13} & J_{24} & J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_1 & j_3 & J_{13} \\ j_2 & j_4 & J_{24} \\ J_{12} & J_{34} & J \end{bmatrix} = \widehat{J}_{12}\,\widehat{J}_{34}\,\widehat{J}_{13}\,\widehat{J}_{24} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_{13} & J_{24} & J \end{Bmatrix}$$

Un zéro

$$\begin{bmatrix} 0 & \ell & \ell \\ J & j_1 & j_2 \\ J & k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \widehat{j}_2\,\widehat{k}_1\,(-)^{j_2+k_1+J+\ell} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ k_2 & k_1 & \ell \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} j_1 & J & j_2 \\ \ell & 0 & \ell \\ k_1 & J & k_2 \end{bmatrix} = \widehat{j}_2\,\widehat{k}_1\,(-)^{2j_1-j_2-k_1+2k_2+J+\ell} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ k_2 & k_1 & \ell \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} J & 0 & J \\ j_1 & \ell & k_1 \\ j_2 & \ell & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J & j_1 & j_2 \\ 0 & \ell & \ell \\ J & k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \widehat{j}_2\,\widehat{k}_1 (-)^{j_1+2j_2+2k_1+k_2-J-\ell} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ k_2 & k_1 & \ell \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ \ell & \ell & 0 \\ k_1 & k_2 & J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_1 & \ell & k_1 \\ j_2 & \ell & k_2 \\ J & 0 & J \end{bmatrix} = \frac{\widehat{k}_1\,\widehat{k}_2}{\widehat{\ell}} (-)^{j_1+2j_2+2k_1+k_2-J-\ell} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ k_2 & k_1 & \ell \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} J & J & 0 \\ j_1 & k_1 & \ell \\ j_2 & k_2 & \ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J & j_1 & j_2 \\ J & k_1 & k_2 \\ 0 & \ell & \ell \end{bmatrix} = \frac{\widehat{j}_2\,\widehat{k}_2}{\widehat{J}} (-)^{j_2+k_1+J+\ell} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ k_2 & k_1 & \ell \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ k_1 & k_2 & J \\ \ell & \ell & 0 \end{bmatrix} = \widehat{J}\,\widehat{\ell}\,(-)^{k_1+j_2+J+\ell} \begin{Bmatrix} k_2 & k_1 & J \\ j_1 & j_2 & \ell \end{Bmatrix}$$

2 zéros

$$\begin{bmatrix} 0 & j_1 & j_1 \\ j_2 & 0 & j_2 \\ j_2 & j_1 & J \end{bmatrix} = (-)^{j_1+j_2-J}$$

$$\begin{bmatrix} j_1 & 0 & j_1 \\ J & j_2 & j_1 \\ j_2 & j_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_1 & J & j_2 \\ 0 & j_2 & j_2 \\ j_1 & j_1 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & j_1 & j_1 \\ j_2 & J & j_1 \\ j_2 & j_2 & 0 \end{bmatrix} = (-)^{j_1+j_2-J}$$

$$\begin{bmatrix} j_1 & j_1 & 0 \\ j_2 & 0 & j_2 \\ J & j_1 & j_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ j_1 & 0 & j_1 \\ 0 & j_2 & j_2 \end{bmatrix} = \frac{\widehat{J}}{\widehat{j}_1\,\widehat{j}_2}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & j_1 & j_1 \\ j_2 & j_2 & 0 \\ j_2 & J & j_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & j_2 & j_2 \\ j_1 & j_2 & J \\ j_1 & 0 & j_1 \end{bmatrix} = \frac{\widehat{J}}{\widehat{j}_1\,\widehat{j}_2}$$

$$\begin{bmatrix} j_1 & j_1 & 0 \\ j_1 & J & j_2 \\ 0 & j_2 & j_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\widehat{j}_1\,\widehat{j}_1} = \frac{1}{2j_1+1}$$

$$\begin{bmatrix} j_1 & 0 & j_1 \\ 0 & j_2 & j_2 \\ j_1 & j_2 & J \end{bmatrix} = 1$$

$$\begin{bmatrix} j_1 & j_1 & 0 \\ J & j_1 & j_2 \\ j_2 & 0 & j_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_1 & J & j_2 \\ j_1 & j_1 & 0 \\ 0 & j_2 & j_2 \end{bmatrix} = (-)^{j_1+j_2-J}\,\frac{1}{\widehat{j}_1\,\widehat{j}_1} = \frac{(-)^{j_1+j_2-J}}{2j_1+1}$$

$$\begin{bmatrix} j_1 & 0 & j_1 \\ j_2 & j_2 & 0 \\ J & j_2 & j_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ 0 & j_2 & j_2 \\ j_1 & 0 & j_1 \end{bmatrix} = (-)^{j_1+j_2-J}\,\frac{\widehat{J}}{\widehat{j}_1\,\widehat{j}_2}$$

$$\begin{bmatrix} J & j_1 & j_2 \\ j_2 & 0 & j_2 \\ j_1 & j_1 & 0 \end{bmatrix} = (-)^{j_1+j_2-J}$$

$$\begin{bmatrix} j_1 & j_1 & 0 \\ 0 & j_2 & j_2 \\ j_1 & J & j_2 \end{bmatrix} = (-)^{j_1+j_2-J}\,\frac{\widehat{J}}{\widehat{j}_1\,\widehat{j}_2}$$

$$\begin{bmatrix} J & j_1 & j_2 \\ j_1 & j_1 & 0 \\ j_2 & 0 & j_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2j_1+1}$$

trois zéros

$$\begin{bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_1 & j_2 & J_{12} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_1 & j_1 & 0 \\ j_2 & j_2 & 0 \\ J_{12} & J_{12} & 0 \end{bmatrix} = \frac{\widehat{J}_{12}}{\widehat{j}_1\,\widehat{j}_2}$$

$$\begin{bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ 0 & 0 & 0 \\ j_1 & j_2 & J_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_1 & 0 & j_1 \\ j_2 & 0 & j_2 \\ J_{12} & 0 & J_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_1 & j_2 & J_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & j_1 & j_1 \\ 0 & j_2 & j_2 \\ 0 & J_{12} & J_{12} \end{bmatrix} = 1$$

C. ESPACE DE HILBERT DES ETATS A UNE PARTICULE

L'espace de Hilbert des états à une particule $\mathscr{E}^{(1)}$ est le produit tensoriel, $\mathscr{E}^{(1)} = \mathscr{E}_{\vec{r}} \otimes \mathscr{E}_s \otimes \mathscr{E}_t$, de l'espace de Hilbert $\mathscr{E}_{\vec{r}}$ des états à une particule sans spin et isospin, défini sur l'espace R^3, $\vec{r}$ par les espaces de spineurs de spin $\mathscr{E}_s$ et d'isospin $\mathscr{E}_t$.

Nous définirons chacun de ces espaces, puis indiquerons les bases de $\mathscr{E}^{(1)}$ correspondant aux états propres de différents hamiltoniens à un corps.

C.1. ESPACE DE SPINEURS $\mathscr{E}_s$ et $\mathscr{E}_t$.

C.1.1. Espace de spin $\mathscr{E}_s$.

a) Considérons l'algèbre des opérateurs engendrée par les générateurs s_i du groupe des rotations (B.2.1) qui satisfont les relations de commutation :

$$[s_i , s_j] = i \varepsilon_{ijk} s_k \quad . \tag{C-1}$$

La base irréductible pour $s = 1/2$, de l'ensemble complet d'observables qui commutent $\vec{s}^2$, s_3, engendre l'espace de spin $\mathscr{E}_s$. Cette base, avec les notations de (B.3), satisfait les relations d'orthogonalité et de fermeture suivantes :

$$\langle [a]\, s\, m_s | [a]\, s\, m'_s \rangle = \delta_{m_s m'_s} \quad , \quad \sum_{m_s} |[a]\, s\, m_s\rangle\langle [a]\, s\, m_s| = \mathbb{1} \, . \tag{C-2}$$

Nous définissons la représentation fonctionnelle (fonction d'onde) par :

$$\chi^{s}_{m_s}(\sigma) \equiv \langle [a]\, s\, \sigma | [a]\, s\, m_s \rangle = \delta_{\sigma m_s} \quad . \tag{C-3}$$

Dans cette représentation les relations d'orthogonalité et de fermeture sont respectivement :

$$\sum_{\sigma} \chi^{s*}_{m_s}(\sigma) \chi^{s}_{m'_s}(\sigma) = \delta_{m_s m'_s} \quad , \quad \sum_{m_s} \chi^{s}_{m_s}(\sigma) \chi^{s*}_{m_s}(\sigma') = \delta_{\sigma\sigma'} \, . \tag{C-4}$$

Cette base de fonctions réelles ne satisfait pas la condition (B-39) réalisable pour j entier seulement.

b) Pour définir l'action de l'opérateur antiunitaire renversement du temps U_T, rappelons quelques résultats.

Il est possible de faire un choix de phase des états propres d'un opérateur antiunitaire A, tel que les valeurs propres correspondantes soient égales à 1. En

effet, si $A|a\rangle = e^{i\varphi}|a\rangle$, il suffit de choisir $|a'\rangle = e^{i\varphi/2}|a\rangle$, alors :

$$A|a'\rangle = 1\,|a'\rangle \quad .$$

Soit $U(\pi,\hat{a})$ l'opérateur de rotation d'angle π, et d'axe $\hat{a}$ perpendiculaire au vecteur $\hat{3}$ du système d'axes de quantification choisi. L'opérateur $U(\pi,\hat{a})U_T$ commute avec $\vec{s}^2$, démontrons qu'il commute avec s_3. Utilisant la relation d'anticommutation de U_T avec les générateurs s_i :

$$U_T\, s_i = - s_i\, U_T \quad ,$$

ainsi que la loi (B-25) de transformation par rotation de ces générateurs, on obtient :

$$[U(\pi,\hat{a})U_T, s_3] = U(\pi,\hat{a})U_T s_3 - s_3 U(\pi,\hat{a})U_T = -(U(\pi,\hat{a})s_3 + s_3 U(\pi,\hat{a}))U_T$$
$$= -(U(\pi,\hat{a})s_3 U^{-1}(\pi,\hat{a}) + s_3)\,U(\pi,\hat{a})U_T = 0 \quad . \qquad \text{(C-5)}$$

Par suite, l'état $|sm_s\rangle$ est état propre de l'opérateur antiunitaire $U(\pi\hat{a})U_T$. Nous faisons un choix de phase de cet état tel que la valeur propre correspondante soit 1 et de plus adoptons l'axe 2 comme axe $\hat{a}$, d'où :

$$U_T\,|s\,m_s\rangle = U^{-1}(\pi,\hat{2})\,|s\,m_s\rangle = |s\,m'_s\rangle\, d^{s}_{m'_s\,m_s}(-\pi)$$
$$= (-)^{s+m_s}\,|s\,-m_s\rangle \quad . \qquad \text{(C-6)}$$

En représentation fonctionnelle (C-3), à l'état $U_T|sm_s\rangle$ correspond la fonction $^{T}\chi^{s}_{m_s}$ telle que :

$$(^{T}\chi^{s}_{m_s})(\sigma) = (-)^{s+m_s}\,\chi^{s}_{-m_s}(\sigma) \quad . \qquad \text{(C-7)}$$

C.1.2. Espace d'isospin $\mathscr{E}_t$.

La construction est identique : les états propres de $\vec{t}^2$ et t_3 sont $|tm_t\rangle$, $m_t = -1/2, +1/2$, ou en représentation fonctionnelle :

$$\chi^{t}_{m_t}(\tau) \equiv \langle t\,\tau\,|\,t\,m_t\rangle = \delta_{\tau,m_t} \quad . \qquad \text{(C-8)}$$

Ils correspondent aux deux états physiques du nucléon, proton ($m_t = 1/2$) et neutron. Les projecteurs sur les états de proton et de neutron sont alors respectivement :

$$\mathcal{P}_p = 1/2 + t_3 \quad , \quad \mathcal{P}_n = 1/2 - t_3 \quad . \qquad \text{(C-9)}$$

C.2. PARTIE SPATIALE, ESPACE DE HILBERT $\mathcal{E}_{\vec{r}}$.

a) On considère l'algèbre des opérateurs engendrée par les composantes sur un système d'axes galiléen, des opérateurs position $\vec{r}$ et impulsion $\vec{p}$ satisfaisant les relations de commutation :

$$[r_i , r_j] = 0 \quad , \quad [r_i , p_j] = i\hbar \delta_{ij} \quad , \quad [p_i , p_j] = 0 \quad . \tag{C-10}$$

Les états propres, d'un ensemble complet d'observables qui commutent de cette algèbre, engendrent l'espace $\mathcal{E}_{\vec{r}}$.

Ainsi, les états propres $|\vec{r}\rangle$ de l'opérateur position forment une base complète orthonormée de $\mathcal{E}_{\vec{r}}$:*

$$\int d^3r \; |\vec{r}\rangle\langle\vec{r}| = \mathbb{1} \quad , \quad \langle\vec{r}|\vec{r}'\rangle = \delta^3(\vec{r}-\vec{r}') \quad . \tag{C-11}$$

Les composantes sur cette base d'un état quelconque $|f\rangle$ de $\mathcal{E}_{\vec{r}}$ définissent la fonction d'onde de cet état :

$$|f\rangle = \int d^3r \; |\vec{r}\rangle\langle\vec{r}|f\rangle = \int d^3r \; |\vec{r}\rangle f(\vec{r}) \quad . \tag{C-12}$$

L'ensemble des fonctions f est l'espace de Hilbert des fonctions de carré sommables définies sur R^3.

Le vecteur $\vec{r}$ est défini par ses 3 composantes sur 3 vecteurs orthonormés directs $\hat{a}_i$, notés globalement [a] ; les fonctions des r_i dépendent de ce choix d'axe suivant :

$$\vec{r} = r_i \hat{a}_i \quad , \quad f_{[a]}(r_1, r_2, r_3) = f(\vec{r}) \quad . \tag{C-13}$$

L'opérateur renversement du temps commute avec $\vec{r}$. On définit son action sur $\mathcal{E}_{\vec{r}}$ en choisissant (C.1.1) 1 comme valeur propre de l'état $|\vec{r}\rangle$:

$$U_T |\vec{r}\rangle = |\vec{r}\rangle \quad . \tag{C-14}$$

Ainsi, la fonction d'onde ${}^Tf$ de l'état $U_T|f\rangle$ satisfait :

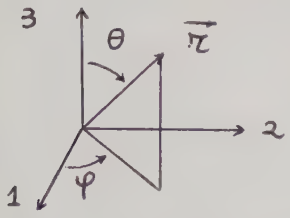
$$({}^Tf)(\vec{r}) = f^*(\vec{r}) \quad \forall \vec{r} \quad . \tag{C-15}$$

b) Les parties radiale et angulaire de l'opérateur $\vec{r}$ se séparent en $\vec{r} = r\hat{r}$, où r est le module de $\vec{r}$ et $\hat{r}$ le vecteur unitaire porté par $\vec{r}$. Pour un choix de vecteurs orthonormés directs $(\hat{a}_i)$, ce dernier opérateur $\hat{r}$

---

*Les états $|\vec{r}\rangle$, ainsi que $|r,\hat{r}\rangle$ n'appartiennent pas en fait à l'espace de Hilbert, n'étant pas normalisables.

est défini par les angles θ et φ :



$$\hat{r} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{a}_1 + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{a}_2 + \cos\theta\,\hat{a}_3 . \qquad \text{(C-16)}$$

La base propre $(|r\,\hat{r}\rangle = |[a]\ r\ \theta\ \varphi\rangle)$ de ces opérateurs satisfait la relation d'orthogonalité :

$$\langle r,\hat{r}\,|\,r'\hat{r}'\rangle = \frac{\delta(r-r')}{r^2}\,\delta^2(\hat{r}-\hat{r}') = \frac{\delta(r-r')}{r^2}\,\delta(\cos\theta-\cos\theta')\delta(\varphi-\varphi') \qquad \text{(C-17)}$$

Soit $\vec{\ell} = \vec{r}\times\vec{p}$ l'opérateur moment cinétique, ses trois composantes s'identifient aux générateurs de la représentation unitaire du groupe des rotations sur $\mathcal{E}_{\vec{r}}$ définie par :

$$U(R)\,|\vec{r}\rangle = |R\,\vec{r}\rangle \quad .$$

Les opérateurs r, $\vec{\ell}^2$, ℓ_3 forment un ensemble complet d'observables qui commutent. La base propre correspondante $(|[a]\ r\,\ell\,m\rangle)$, (notations B-28) est définie par :

$$\langle [a]\ r'\,\theta\,\varphi\,|[a]\,r\,\ell\,m\rangle = \frac{\delta(r-r')}{r^2}\ Y^{\ell}_{m}(\theta,\varphi) , \qquad \text{(C-18)}$$

où Y^{ℓ}_{m} sont les harmoniques sphériques définis en (B-41).

Du choix (C-14), nous déduirons l'action du renversement du temps U_T sur l'état $|[a]\ r\ell\,m\rangle$:

$$U_T\,|[a]\ r\,\ell\,m\rangle = (-)^{\ell+m}\,|[a]\,r\,\ell-m\rangle \quad . \qquad \text{(C-19)}$$

Notons que le choix (C-14) conduit au même résultat que le choix suivant, analogue à (C-6) :

$$U(\pi,\hat{z})\,U_T\,|[a]\,r\,\ell\,m\rangle = |[a]\ r\,\ell\,m\rangle \quad . \qquad \text{(C-20)}$$

C.3. LES ETATS DE BASE DE L'ESPACE $\mathcal{E}^{(1)}$.

C.3.1. Généralités.

a) Soit $\vec{j} = \vec{\ell} + \vec{s}$ l'opérateur moment cinétique total dont les composantes s'identifient aux générateurs de la représentation unitaire du groupe des rotations sur $\mathcal{E}^{(1)}$.

Nous utilisons un hamiltonien à un corps du type :

$$h = t + v(r) . \qquad \text{(C-21)}$$

Le terme cinétique t est, en représentation position :

$$t = \frac{-\hbar^2}{2\mu} \vec{\nabla}^2 \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{N-1}{N} m \quad , \tag{C-22}$$

où μ est la masse réduite d'une particule pour un système de N nucléons de masse m, avec :

$$m c^2 = 939.01 \text{ Mev (neutron)} \qquad \hbar c = 197.329 \text{ Mev fm} ,$$
$$\frac{\hbar^2}{2m} = 20.734 \text{ Mev fm}^2 . \tag{C-23}$$

Le potentiel v est isotrope et peut contenir un terme spin-orbite,

$$v(r) = v_1(r) + v_2(r) \vec{\ell} \cdot \vec{s} \quad . \tag{C-24}$$

Les opérateurs h, $\vec{\ell}^2$, $\vec{s}^2$, $\vec{j}^2$, j_3, $\vec{t}^2$, t_3 forment un ensemble complet d'observables qui commutent, dont la base propre est définie par :

$$|[a]\varepsilon\ell s j m_j t m_t\rangle = \sum_{m_\ell m_s} (\ell s m_\ell m_s | j m_j) |[a]\varepsilon\ell m_\ell\rangle |[a] s m_s\rangle |t m_t\rangle , \tag{C-25}$$

où ε est la valeur propre de h. Avec les notations (C-3,8,18), les fonctions d'onde correspondantes sont :

$$f_{\varepsilon\ell s j m_j t m_t}(x) = \langle [a] r\theta\varphi | \langle [a] s\sigma | \langle t\tau | [a]\varepsilon\ell s j m_j t m_t\rangle$$
$$= f_{\varepsilon\ell j}(r) \sum_{m_\ell m_s} (\ell s m_\ell m_s | j m_j) Y^\ell_{m_\ell}(\theta,\varphi) \otimes \chi^s_{m_s}(\sigma) \otimes \chi^t_{m_t}(\tau) . \tag{C-26}$$

où x désigne l'ensemble des variables r, θ, φ, σ, τ.

Montrons que l'on peut choisir $f_{\varepsilon\ell j}(r)$ réelle : le hamiltonien h invariant par rotation et renversement du temps, commute avec l'opérateur $U(\pi,\hat{a})U_T$ (C.1.1). Il en est de même des autres opérateurs de l'ensemble complet considéré ci-dessus. L'état (C-25) est donc état propre de $U(\pi,\hat{2})U_T$, nous choisissons (C.1.1) 1 pour valeur propre :

$$U(\pi,\hat{2}) U_T |[a]\varepsilon\ell s j m_j t m_t\rangle = |[a]\varepsilon\ell s j m_j t m_t\rangle . \tag{C-27}$$

La fonction d'onde radiale $f_{\varepsilon\ell j}(r)$ est la composante de l'état (C-25) sur la base couplée dont les vecteurs sont définis par :

$$|[a] r\ell s j m_j t m_t\rangle = \sum_{m_\ell m_s} (\ell s m_\ell m_s | j m_j) |[a] r\ell m_\ell\rangle |[a] s m_s\rangle |t m_t\rangle \tag{C-28}$$

Par suite des choix de phases (C-6) et (C-20), ces vecteurs sont états propres de $U(\pi,\hat{2})U_T$ avec la valeur propre 1.

Les fonctions d'onde radiales $f_{\varepsilon \ell j}(r)$ sont réelles, en effet, en notant $|\varepsilon\rangle$ et $|r\rangle$ les états (C-25) et (C-28) respectivement, on a :

$$|\varepsilon\rangle = \int r^2 dr \; f_\varepsilon(r) |r\rangle = U(\pi, \hat{z}) U_T |\varepsilon\rangle = \int r^2 dr \; f_\varepsilon^*(r) |r\rangle \; . \qquad \text{(C-29)}$$

Nous choisissons de plus ces fonctions radiales positives (ou nulles) au voisinage de r = 0.

Pour la partie discrète du spectre de h, au lieu de ε , on introduit le nombre quantique n(=1,2,...) égal au nombre de noeuds de la fonction radiale origine exclue et infini inclus.

On désigne par s, p, d, ... les valeurs $\ell = 0,1,2,....$

C.3.2. Potentiels $v(r)$ utilisés : Oscillateur harmonique et Wood-Saxon.

a) Oscillateur harmonique isotrope sans terme spin-orbite :

$$v_1(r) = \frac{1}{2} \mu \omega^2 r^2 + v_o \qquad v_2(r) \equiv 0 \; , \qquad \text{(C-30)}$$

ou encore, α étant la constante de l'oscillateur harmonique (Tab. 2)

$$\alpha = \left(\frac{\mu \omega}{\hbar} \right)^{1/2} \; , \qquad \text{(C-31)}$$

$$v_1(r) = \frac{\hbar^2}{2\mu} (\alpha^4 r^2 + v_o') \quad , \quad v_o' \equiv \frac{2\mu}{\hbar^2} v_o \; . \qquad \text{(C-32)}$$

Le spectre de h est entièrement discret, les valeurs propres sont :

$$\varepsilon = (2n + \ell - 1/2) \hbar\omega + v_o \; , \qquad \text{(C-33)}$$

avec n = 1,2,... précédemment défini et pour $\hbar\omega$ en MeV et α en fermi inverse :

$$\hbar\omega = 41{\cdot}468 \frac{N}{N-1} \alpha^2 \; . \qquad \text{(C-34)}$$

Les fonctions radiales $f_{n\ell}(r)$ (C-26) des états propres, normalisées, ont pour expression :

$$f_{n\ell}(r) = C_{n\ell} \alpha^{3/2+\ell} r^\ell e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 r^2} L_{n-1}^{\ell+1/2}(\alpha^2 r^2) \; , \qquad \text{(C-35)}$$

où

$$C_{n\ell} = \frac{1}{\pi^{1/4}} \sqrt{\frac{2^{n+\ell+1}(n-1)!}{(2n+2\ell-1)!!}} \qquad \text{(C-36)}$$

et $L_q^p(x)$ est le polynôme de Laguerre [52] :

$$L_q^p(x) = \sum_{m=0}^{q} \frac{\Gamma(q+p+1)}{\Gamma(p+m+1)(q-m)!} \frac{(-x)^m}{m!} , \qquad (C\text{-}37)$$

$$L_0^p(x) = 1$$

$$L_1^p(x) = (p+1) - x.$$

Le rayon quadratique moyen dans l'état n, ℓ est :

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle_{n\ell}} = \alpha^{-1} \sqrt{2n + \ell - 1/2} \qquad (C\text{-}38)$$

b) Potentiel de Wood-Saxon, de rayon $R = r_o (N-1)^{1/3}$ et de largeur a (Tab. 3) :

$$v_1(r) = v_o \frac{1}{1 + e^{(r-R)/a}} , \qquad (C\text{-}39)$$

avec un terme spin-orbite extremum à la surface (r=R) de v_1, ayant pour expression [53] * :

$$v_2(r) = v_{\ell s} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{1 + e^{(r-R)/a}} \right) . \qquad (C\text{-}40)$$

On détermine v_o pour chaque état de particule indépendante de façon à reproduire les énergies de liaison expérimentales (Figs. 2 et 3).

La méthode numérique utilisée pour ce calcul est précisée en (F.2).

Les résultats correspondant aux noyaux étudiés (C^{12}, C^{13}, O^{16}, O^{17} et F^{19}) se trouvent dans les tableaux 4, 5, 6, 7 et 8.

Remarque : Les états de particules indépendantes sont alors états propres de différents potentiels. Cependant, pour les états que nous considérons, leur orthogonalité est assurée par la dépendance angulaire et spinorielle sauf pour les états s.

Pour ces états $\ell = 0$, on utilise le potentiel reproduisant l'état individuel s le moins lié dans le noyau.

---

*Le terme spin-orbite est souvent défini par :

$$v_2(r)\, \vec{\ell} \cdot \vec{\sigma} = v'_{\ell s} \left(\frac{\hbar}{m_\pi c} \right)^2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{1 + e^{(r-R)/a}} \right) \vec{\ell} \cdot \vec{\sigma} ,$$

où m_π est la masse du méson π. La profondeur $v'_{\ell s}$ est reliée à celle que nous utilisons par :

$$v'_{\ell s} = 0.234\, v_{\ell s} ,$$

où $v_{\ell s}$ est en Mev fm^2 et $v_{\ell s}$ en Mev.

D. ETATS A N PARTICULES

Pour un système de N fermions identiques, le postulat de symétrisation impose aux états d'être totalement antisymétriques par rapport aux substitutions des particules. D'autre part, l'invariance par rotation et celle de charge nous amènent à considérer des états de bon spin et isospin. Enfin pour les calculs de valeurs moyennes, ces états doivent être normalisés. Nous étudions successivement ces trois opérations : antisymétrisation, couplage et normalisation, puis nous définirons les états considérés dans notre problème.

D.1. ANTISYMETRISATION, COUPLAGE ET NORMALISATION.

D.1.1. Opérateur d'antisymétrisation.

Soit $(|i\rangle)$ une base complète de $\mathcal{E}^{(1)}$. Considérons l'espace $E^{(N)}$, produit tensoriel de N espaces $\mathcal{E}^{(1)}$:

$$E^{(N)} = \prod_{1}^{N} \otimes \mathcal{E}^{(1)} \quad , \tag{D-1}$$

dont une base est définie par le produit tensoriel des vecteurs de base de $\mathcal{E}^{(1)}$:

$$(|i_1\rangle \otimes \cdots \otimes |i_N\rangle) \, . \tag{D-2}$$

Soit $\mathcal{P}$ la substitution $\begin{pmatrix} 1 \ldots j \ldots N \\ k_1 \ldots k_j \ldots k_N \end{pmatrix}$, on définit l'opérateur linéaire de substitution $\mathcal{P}$ sur $E^{(N)}$ par la relation suivante :

$$\mathcal{P} \, |i_1\rangle \otimes \cdots \otimes |i_N\rangle = \cdots \otimes |i_j\rangle \otimes \cdots \quad , \tag{D-3}$$

où $|i_j\rangle (j=1,\ldots,N)$ occupe le rang k_j dans le produit tensoriel.

Dans le but de faciliter le traitement du couplage des états antisymétrisés (D.1.2), introduisons une notation où les états i_j sont écrits dans un ordre choisi arbitrairement. L'information du rang k_j occupé par l'état $|i_j\rangle$ dans le produit tensoriel est indiquée entre parenthèses :

$$|i_1(k_1), \ldots, i_N(k_N)\rangle \equiv \cdots \underset{\text{rang } k_j}{\otimes} |i_j\rangle \otimes \cdots \quad . \tag{D-4}$$

L'opérateur d'antisymétrisation $\mathcal{A}$ sur $E^{(N)}$ est défini par :

$$\mathcal{A} \equiv \sum_{\mathcal{P}} (-)^p \, \mathcal{P} \quad , \tag{D-5}$$

où p est la parité de la substitution $\mathcal{P}$. Cet opérateur $\mathcal{A}$ est hermitique. On introduit un opérateur d'antisymétrisation normalisé :

$$\mathcal{A}_n \equiv \frac{1}{N!} \mathcal{A} \quad , \tag{D-6}$$

qui satisfait :

$$\mathcal{A}_n^2 = \mathcal{A}_n \quad . \tag{D-7}$$

Les états physiques appartiennent au sous-espace $\mathcal{E}^{(N)}$ des vecteurs totalement antisymétrisés de $E^{(N)}$. Une base de $\mathcal{E}^{(N)}$ est définie par les vecteurs :

$$|\widetilde{i_1(1), \cdots, i_N(N)}\rangle = \mathcal{A} \, |i_1(1), \cdots, i_N(N)\rangle \quad . \tag{D-8}$$

Remarques : 1- L'ordre $i_1(1),\ldots,i_N(N)$ fixe un choix de phase de l'état (D-8). Changer l'ordre des indices entre parenthèses ou des états, par la substitution $\begin{pmatrix} 1 \ldots N \\ k_1 \ldots k_N \end{pmatrix}$ de parité p, introduit une phase, à savoir :

$$|\widetilde{i_1(k_1), \cdots, i_N(k_N)}\rangle = |\widetilde{i_{k_1}(1), \cdots, i_{k_N}(N)}\rangle = (-)^p \, |\widetilde{i_1(1), \cdots, i_N(N)}\rangle \, . \tag{D-9}$$

En seconde quantification l'ordre des états est celui des opérateurs de création a_i^+ des états $|i\rangle$:

$$|\widetilde{i_1(1), \cdots, i_N(N)}\rangle = a^+_{i_1} \cdots a^+_{i_N} \, |0\rangle \, , \tag{D-10}$$

où $|0\rangle$ désigne le vide.

2- La fonction d'onde de l'état (D-8) sur la base $(|\widetilde{x_1, \ldots, x_N}\rangle)$ où x désigne l'ensemble des variables $\vec{r}$, $\vec{\sigma}$, $\vec{\tau}$ est au coefficient N! près un déterminant de Slater :

$$\phi(x_1, \cdots, x_N) = \langle \widetilde{x_1(1), \cdots, x_N(N)} \, | \, \widetilde{i_1(1), \cdots, i_N(N)} \rangle \tag{D-11}$$

Par la suite (D.2), nous construirons des états antisymétrisés à $N = \sum_{i=1}^{q} n_i$ particules, en antisymétrisant entre elles q structures antisymétrisées de n_i particules* :

$$|\widetilde{n_1, \cdots, n_q}\rangle = \mathcal{A}(n_1, \cdots, n_q) \, |\widetilde{n}_1, \cdots, \widetilde{n}_q\rangle \quad . \tag{D-12}$$

On définit pour cela, les opérateurs d'antisymétrisation partielle par :

$$\mathcal{A}(n_1, \cdots, n_q) = \sum_{\mathcal{P}} (-)^p \, \mathcal{P}(n_1, \cdots, n_q) \, , \tag{D-13}$$

---

*On a omis les indices entre parenthèses pour éviter d'alourdir l'écriture :

$$|\widetilde{n_1, \cdots, n_q}\rangle = |n_1(1, \cdots, n_1), \widetilde{n_2(n_1+1, \cdots, n_1+n_2)}, \ldots, n_q(\ldots N)\rangle \, . \tag{D-12'}$$

où la somme sur $\mathcal{P}$ porte sur les $N!/\prod_{i=1}^{q} n_i!$ substitutions $\mathcal{P}(n_1,\ldots,n_q)$ différentes des produits de substitutions portant séparément sur les structures à n_i particules. Les opérateurs normalisés correspondant sont :

$$\mathcal{A}_n(n_1,\cdots,n_q) = \frac{\prod_{i=1}^{q} n_i!}{N!}\ \mathcal{A}(n_1,\cdots,n_q), \qquad \text{(D-14)}$$

ils satisfont (D-7).

D.1.2. Etats antisymétrisés et couplés.

a) Soit $(|jm\rangle)$ une base propre de $\vec{j}^2$ et j_3 dans $\mathcal{E}^{(1)}$ et

$$|j_1 m_1(1),\ldots,j_N m_N(N)\rangle \equiv |j_1 m_1\rangle \otimes \cdots \otimes |j_N m_N\rangle, \qquad \text{(D-15)}$$

les vecteurs de base de $E^{(N)}$.

Le couplage des N systèmes $j_i m_i$ dépend du choix de l'ordre dans lequel on effectue les couplages intermédiaires. Par exemple, pour un couplage de proche en proche, on a :

$$|(\cdots((j_1(1), j_2(2))J_2, j_3(3))J_3, \cdots, j_N(N))JM\rangle = \qquad \text{(D-16)}$$

$$\sum_{m_i M_j} (j_1 j_2 m_1 m_2 | J_2 M_2)\cdots(J_{N-1}\, j_N\, M_{N-1}\, m_N | JM)\ |j_1 m_1(1),\cdots,j_N m_N(N)\rangle \ .$$

L'état antisymétrisé correspondant s'obtient par action de l'opérateur $\mathcal{A}$. Notons globalement par g le produit des coefficients de Clebsch-Gordan pour un couplage quelconque que l'on n'explicite pas, nous avons alors :

$$|\widetilde{(j_1(1),\cdots,j_N(N))}JM\rangle = \mathcal{A}\sum_m g\,|j_1 m_1(1),\cdots,j_N m_N(N)\rangle = \sum_m g\,\mathcal{A}\,|j_1 m_1(1),\cdots,j_N m_N(N)\rangle. \qquad \text{(D-17)}$$

Ainsi, les coefficients de couplage g sont liés à l'ordre initial choisi pour les états et leurs couplages intermédiaires, et non aux différents ordres engendrés par les N! substitutions de l'opérateur $\mathcal{A}$.

En raison de la factorisation par rapport à $\mathcal{A}$ des coefficients de couplage g dans (D-17), un changement de l'ordre des indices entre parenthèses par la substitution $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & N \\ k_1 & \cdots & k_N \end{pmatrix}$ de parité p amène un changement de phase identique à celui de (D-9) :

$$|\widetilde{(j_1(k_1),\cdots,j_N(k_N))}JM\rangle = (-)^p\,|\widetilde{(j_1(1),\cdots,j_N(N))}JM\rangle . \qquad \text{(D-18)}$$

Mais, si on change l'ordre des états, on introduit d'une part les coefficients $\mathscr{C}$ de changement des couplages (produit de coefficients de Clebsch-Gordan et éventuellement des sommations sur les nouveaux couplages intermédiaires), et d'autre part la phase (D-18) pour rétablir l'ordre initial des indices entre parenthèses. En effet, en notant $\mathscr{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \dots N \\ q_1 \dots q_N \end{pmatrix}$ la substitution inverse de $\mathscr{P}$ (de même parité p) on a :

$$|\widetilde{(j_{k_1}(1),\cdots,j_{k_N}(N))}\,JM\rangle = \mathscr{A}\,|(j_{k_1}(1),\cdots,j_{k_N}(N))\,JM\rangle = \mathscr{A}\sum_{J_i}\mathscr{C}\,|(j_1(q_1),\cdots,j_N(q_N))\,JM\rangle$$

$$= \sum_{J_i}\mathscr{C}\,|\widetilde{(j_1(q_1),\cdots,j_N(q_N))}\,JM\rangle = (-)^{p}\sum_{J_i}\mathscr{C}\,|\widetilde{(j_1(1),\cdots,j_N(N))}\,JM\rangle. \quad \text{(D-19)}$$

Ce qui précède s'étend directement aux cas où l'on couple, non seulement les moments angulaires, mais aussi les isospins. Ainsi, un état antisymétrisé à deux nucléons ($t_1 = t_2 = 1/2$) dont on change l'ordre de couplage, s'écrit (en couplage j-j) :

$$|\widetilde{(\alpha_1 j_1 t_1(1), \alpha_2 j_2 t_2(2))}\,JM_J\,TM_T\rangle =$$

$$(-)^{j_1+j_2-J-T}\,|\widetilde{(\alpha_2 j_2 t_2(1), \alpha_1 j_1 t_1(2))}\,JM_J\,TM_T\rangle, \quad \text{(D-20)}$$

où α désigne les nombres quantiques supplémentaires nécessaires pour définir un état individuel (par exemple n, ℓ).

b) L'antisymétrisation d'un état couplé peut introduire des contraintes sur les couplages possibles. En effet, si dans (D-17), deux au moins des états individuels sont tels que $\alpha_1 = \alpha_2$ et $j_1 = j_2$, alors certains vecteurs de la somme sur les m_i sont nuls : ceux pour lesquels $m_1 = m_2$ que le principe d'exclusion interdit.

Ainsi, ces règles de sélection s'introduisent uniquement dans le cas où l'antisymétrisation porte sur des états individuels de même nombres quantiques α , j ; donnons en deux exemples :

1 - Dans le cas de deux nucléons couplés, si $\alpha_1 = \alpha_2$ et $j_1 = j_2$, les deux vecteurs de (D-20) sont identiques, et donc non nuls si et seulement si la phase qui les relie vaut 1 soit :

$$j_1 + j_2 + J + T \text{ pair} \quad \text{ou} \quad J + T \text{ impair}. \quad \text{(D-21)}$$

2 - Considérons les deux états à $N(\leq 2j+1)$ protons (ou neutrons) obtenus en occupant les états individuels m de même α, j, de telle façon que $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ soit extremum compte tenu de l'antisymétrisation qui implique des états à une particule tous différents, à savoir :

$$M_{max.} = Nj - \frac{N(N-1)}{2} \quad , \quad |\widetilde{j_{(1)}, \cdots, j-(N-1)_{(N-1)}, j_{(N)}}\rangle \, , \tag{D-22}$$

$$M_{min.} = - M_{max.} \quad , \quad |-j_{(1)}, -j+1_{(2)}, \cdots, -j+N-1_{(N)}\rangle , \tag{D-23}$$

où nous avons fait figurer uniquement les nombres quantiques m.

Démontrons que ces états propres de J_3 sont aussi états propres de $\vec{J}^2$ avec la valeur propre $J = M_{max}$. L'action de J_+ (resp. J_-) sur le vecteur (D-22) (resp. D-23) est zéro, car le principe d'exclusion ne permet pas d'augmenter (resp. diminuer) d'une unité l'un quelconque des m occupés. On déduit le résultat annoncé des relations suivantes :

$$J_- J_+ = \vec{J}^2 - J_3(J_3+1) \quad , \quad J_+ J_- = \vec{J}^2 - J_3(J_3-1) \, . \tag{D-24}$$

Les états (D-22) et (D-23) sont utilisés en particulier dans le "modèle aligné"[54] et le "schéma m"[55](D.2.1). Pour $N = 2j+1$, on obtient le résultat suivant : un état antisymétrisé de couches (états individuels de même α et j) complètes ($m = -j$ à $+j$) est couplé à $J = M = 0$.

D.1.3. Normalisation d'un état antisymétrisé.

a) Soit $\mathcal{O}$ un opérateur défini sur $\mathcal{E}^{(N)}$ et symétrique par rapport aux substitutions partielles $\mathcal{P}(n_1, \ldots, n_q)$ (D-13), démontrons que ses éléments de matrice sur les états $|\widetilde{n_1, \ldots, n_q}\rangle$ (D-12) satisfont :

$$\langle \widetilde{n_1, \cdots, n_q} | \mathcal{O} | \widetilde{n_1, \cdots, n_q} \rangle = \frac{N!}{\prod_i n_i!} \langle \widetilde{n}_1, \cdots, \widetilde{n}_q | \mathcal{O} | \widetilde{n_1, \cdots, n_q} \rangle \, . \tag{D-25}$$

On utilise pour cela l'opérateur d'antisymétrisation normalisé (D-14) et les relations de commutation $[\mathcal{O}, \mathcal{P}(n_1, \ldots, n_q)] = 0$:

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{n_1, \cdots, n_q} | \mathcal{O} | \widetilde{n_1, \cdots, n_q} \rangle &= \left(\frac{N!}{\prod_i n_i!} \right)^2 \langle \widetilde{n}_1, \cdots, \widetilde{n}_q | \mathcal{A}_n(n_1, \cdots, n_q) \mathcal{O} \mathcal{A}_n(n_1, \cdots, n_q) | \widetilde{n}_1, \cdots, \widetilde{n}_q \rangle \\ &= \left(\frac{N!}{\prod_i n_i!} \right)^2 \langle \widetilde{n}_1, \cdots, \widetilde{n}_q | \mathcal{O} \mathcal{A}_n(n_1, \cdots, n_q) | \widetilde{n}_1, \cdots, \widetilde{n}_q \rangle \\ &= \frac{N!}{\prod_i n_i!} \langle \widetilde{n}_1, \cdots, \widetilde{n}_q | \mathcal{O} \mathcal{A}(n_1, \cdots, n_q) | \widetilde{n}_1, \cdots, \widetilde{n}_q \rangle \, . \end{aligned} \tag{D-26}$$

b) En appliquant (D-25) à l'opérateur identité de $\mathscr{E}^{(N)}$, la norme $\mathcal{N}$ d'un état antisymétrisé à N particules s'exprime de la façon suivante :

$$\mathcal{N} = \langle \widetilde{i_1(1),\cdots,i_N(N)} \mid \widetilde{i_1(1),\cdots,i_N(N)} \rangle = N! \langle i_1(1),\cdots,i_N(N) \mid \widetilde{i_1(1),\cdots,i_N(N)} \rangle . \tag{D-27}$$

-Pour un état $|\widetilde{i_1(1),\ldots,i_N}(N)\rangle$ totalement décomposé (particules indépendantes, déterminant de Slater), la normalisation $\mathcal{N}$ est triviale dans le cas où les états de la base $(|i\rangle)$ sont orthogonaux :

$$\mathcal{N} = N! \prod_{k=1}^{N} \langle i_k \mid i_k \rangle \quad . \tag{D-28}$$

Si de plus cette base est normalisée, $\mathcal{N} = N!$; l'expression d'un état antisymétrisé et normalisé est alors :

$$|\widetilde{i_1(1),\cdots,i_N(N)}\rangle_n = \frac{1}{\sqrt{N!}} |\widetilde{i_1(1),\cdots,i_N(N)}\rangle \quad . \tag{D-29}$$

Si la base $(|i\rangle)$ n'est pas orthogonale il faut calculer explicitement la norme (D-27).

Remarque : Par un raisonnement analogue on obtient la normalisation d'un état antisymétrisé (D-12) construit à partir de structures antisymétrisées et normalisées $|\mathfrak{n}_i\rangle_n$ et telles que les états individuels de $|\mathfrak{n}_i\rangle_n$ et $|\mathfrak{n}_j\rangle_n$ soient deux à deux orthogonaux pour tous $i \neq j$:

$$|\widetilde{n_1,\cdots,n_q}\rangle_n = \sqrt{\frac{\prod_{i=1}^{q} n_i!}{N!}} \; |\widetilde{n_1,\cdots,n_q}\rangle \quad . \tag{D-30}$$

-Pour normaliser un état antisymétrisé quelconque (par exemple un état couplé), on utilise sa décomposition sur une base d'états antisymétrisés totalement décomposés et normalisés. Dans ce calcul, le couplage peut introduire une difficulté liée aux règles de sélection (D.1.2b). En effet, supposons la base $(|\alpha j\ m\rangle)$ orthonormalisée, le couplage étant une transformation unitaire, les vecteurs couplés $|(\alpha_1 j_1(1),\ldots,\alpha_N j_N(N))JM\rangle$ sont également orthonormalisés. Si les états couplés $\alpha_i j_i$ sont tous distincts, les N! vecteurs engendrés par les substitutions de l'opérateur $\mathscr{A}$ (D-5) sont distincts (et donc orthogonaux) deux à deux, d'où l'expression de l'état normalisé :

$$|\widetilde{(\alpha_1 j_1(1),\cdots,\alpha_N j_N(N))JM}\rangle_n = \frac{1}{\sqrt{N!}} \; |\widetilde{(\alpha_1 j_1(1),\cdots,\alpha_N j_N(N))JM}\rangle \tag{D-31}$$

Par contre, si deux états individuels, au moins, ont même α, j, les N! vecteurs ne sont plus distincts et on doit tenir compte de cette multiplicité. Ainsi, pour deux particules en couplage j-j (D-20), l'état normalisé est :

$$|\widetilde{(\alpha_1 j_1 t_1(1), \alpha_2 j_2 t_2(2))} J M_J T M_T\rangle_n = \frac{1}{\sqrt{2(1+\delta_{12})}} |\widetilde{(\alpha_1 j_1 t_1(1), \alpha_2 j_2 t_2(2))} J M_J T M_T\rangle , \quad \text{(D-32)}$$

où $\delta_{12} = 1$ si $\alpha_1 = \alpha_2$ et $j_1 = j_2$, et 0 dans les autres cas.

Nous construirons explicitement en (D.2) les états normalisés de l'espace de configurations utilisé dans notre problème.

Nous verrons qu'il est commode pour le calcul des éléments de matrice, d'exhiber la normalisation triviale correspondant au nombre de substitutions engendrées par l'opérateur $\mathcal{A}$. Ainsi, pour un état de type (D-12), quels que soient les états couplés $|\tilde{n}_i\rangle_n$, nous écrirons :

$$|\widetilde{(n_1 \cdots, n_q)} J M\rangle_n = \mathcal{N} \sqrt{\frac{\prod_{i=1}^{q} n_i!}{N!}} \; |\widetilde{(n_1, \cdots, n_q)} J M\rangle . \quad \text{(D-33)}$$

D.2. CONSTRUCTION DES ETATS A N PARTICULES DU PROBLEME.

D.2.1. Etats de la cible.

a) Les états considérés dans notre problème sont construits à partir d'un coeur C de n_o nucléons, antisymétrisé et normalisé, formé de couches complètes de protons et neutrons et donc (D.1.2b2) couplé à zéro en spin et isospin, soit :

$$|\widetilde{C(1, \cdots, n_o)} \; 0\rangle_n \quad . \quad \text{(D-34)}$$

Pour les différents noyaux, les couches complètes sont :

C^{12} : 1s1/2 , 1p3/2 ,

O^{16} : 1s1/2 , 1p3/2 , 1p1/2 ,

Ca^{40} : 1s1/2 , 1p3/2 , 1p1/2 , 1d5/2 , 2s1/2 , 1d3/2.

Les états Φ de la cible à N-1 nucléons, de spin et isospin notés globalement I, sont obtenus en antisymétrisant l'état (D-34) du coeur avec l'état antisymétrisé et normalisé $|\tilde{e}\rangle_n$ à $n_1 = N-1-n_o$ nucléons formant la couche externe. On néglige ainsi les excitations particule-trou du coeur. Le couplage entre le coeur scalaire et la couche externe est immédiat, de plus les états individuels de ces deux structures étant orthogonaux, l'antisymétrisation n'introduit pas de règle de sélection (D.1.2b) et la normalisation est un facteur de comptage (D-30) :

$$|\widetilde{\Phi(1,\cdots,N-1)\,I}\rangle_n = \sqrt{\frac{n_0!\,n_1!}{(n_0+n_1)!}}\,\mathcal{A}(n_0,n_1)\Big(|\widetilde{C(1\cdots n_0)\,0}\rangle_n\,|\widetilde{e\,(n_0+1,\cdots,N-1)\,I}\rangle_n\Big)\,|I\,. \tag{D-35}$$

b) Les couches externes des noyaux C^{13} et O^{17} se réduisent respectivement aux états individuels 1p 1/2 et 1d 5/2 .

Dans le cas du F^{19}, la couche externe $|\widetilde{eI}\rangle_n$ est une combinaison linéaire des configurations $|\widetilde{C_3 I}\rangle_n$ à un proton et deux neutrons, couplés en spin et isospin à I, dans la couche 2s-1d :

$$|\widetilde{e(1,2,3)\,I}\rangle_n = \sum_{C_3} x_{C_3}\;|\widetilde{C_3(1,2,3)\,I}\rangle_n\,, \tag{D-36}$$

où les composantes x satisfont :

$$\sum_{C_3} x_{C_3}^{\,2} = 1\quad. \tag{D-37}$$

Nous nous limitons au fondamental du F^{19} de spin $I_j = 1/2$ et d'isospin $I_t = 1/2$.

On construit les états $|\widetilde{C_3 I}\rangle_n$ en antisymétrisant une structure à deux nucléons $|\widetilde{C_2}\rangle_n$ avec un état individuel j_3. La règle de sélection (D-21) limite à 28 le nombre des configurations antisymétrisées C_2 dans la couche 2s-1d (Tab. 10) elles sont définies par l'équation (D-32) et nous les notons :

$$|\widetilde{C_2(1,2)\,I_2}\rangle_n \equiv |\widetilde{(j_1(1),\,j_2(2))\,I_2}\rangle_n\,, \tag{D-38}$$

où I_2 indique globalement le couplage en spin et isospin.

Le couplage à I, de I_2 avec un état individuel j_3, limite les configurations $(C_2,\ j_3)$ à celles qui satisfont :

$$|I_2 - j_3| \leqslant I \leqslant I_2 + j_3\quad. \tag{D-39}$$

De plus, du fait de l'antisymétrisation, nous devons distinguer les deux cas suivants :

i) j_3 est différent de j_1 et j_2. L'antisymétrisation n'introduit pas de règle de sélection sur le couplage et la normalisation est un facteur de comptage:

$$|\widetilde{C_3(1,2,3)\,I}\rangle_n = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathcal{A}(2,1)\,\big(|\widetilde{C_2(1,2)\,I_2}\rangle_n\,|j_3(3)\rangle\big)\,I\,, \tag{D-40}$$

(ou bien couplé dans l'ordre $(j_3,\ I_2)$ pour satisfaire l'ordre standard 1d 5/2, 2s1/2, 1d3/2). Ce sont les configurations du Tableau 11, autres que 1, 10 et 14.

j_1	j_2	J	T	N°
5/2	5/2	0	1	1
		1	0	2
		2	1	3
		3	0	4
		4	1	5
		5	0	6
5/2	1/2	2	0	7
		2	1	8
		3	0	9
		3	1	10
5/2	3/2	1	0	11
		1	1	12
		2	0	13
		2	1	14
		3	0	15
		3	1	16
		4	0	17
		4	1	18
1/2	1/2	0	1	19
		1	0	20
1/2	3/2	1	0	21
		1	1	22
		2	0	23
		2	1	24
3/2	3/2	0	1	25
		1	0	26
		2	1	27
		3	0	28

Tableau 10 : Configurations en couplage j-j à deux nucléons dans la couche 2s-1d, antisymétrisées et couplées en spin et isospin : $|(\widetilde{j_1, j_2})\ J\ T\ \rangle_n$.

ii) $j_1 = j_2 = j_3 = j$. L'antisymétrisation introduit alors des régles de sélection sur le couplage, et on doit s'assurer de l'existence de tels états $(j)^3$ couplés à $I_j = I_t = 1/2$.

On utilise pour cela la technique du "schéma m"[55] qui permet de dénombrer les couplages possibles d'un état antisymétrisé de particules identiques de même nombre quantique $j(n,\ell,j)$, et de déterminer la multiplicité de ces états. La méthode repose sur le fait que l'espace de ces configurations peut être engendré soit par une base d'états couplés, les couplages étant limités par les règles de sélection que nous cherchons, soit par une base d'états non couplés (mais de bonne projection M_j du spin) que nous savons construire en tenant compte du principe d'exclusion, c'est à dire avec des m individuels tous différents.

Pour un mélange de protons et de neutrons, on détermine les spins possibles, correspondant aux différents isospins, en plusieurs étapes que nous détaillons dans le cas de deux neutrons et un proton 1d5/2.

On considère d'abord les configurations à trois neutrons. Ce sont des états de projection d'isospin $M_t = -3/2$ (C.1.2) et donc d'isospin $I_t = 3/2$. Les états (m_1,m_2,m_3) du schéma m sont les suivants :

M_j	états (m_1, m_2, m_3)
9/2	(5/2, 3/2, 1/2)
7/2	(5/2, 3/2, -1/2)
5/2	(5/2, 1/2, -1/2) (5/2, 3/2, -3/2)
3/2	(5/2, 1/2, -3/2) (5/2, 3/2, -5/2) (3/2, 1/2, -1/2)
1/2	(5/2, 1/2, -5/2) (3/2, 1/2, -3/2) (5/2, -1/2, -3/2)

Les valeurs possibles du spin I_j sont : 9/2, 5/2 et 3/2. En effet, il n'existe pas d'état $I_j = 7/2$ (de même 1/2) car les nombres de configurations indépendantes ayant $M_j = 7/2$ et $M_j = 5/2$ sont égaux.

La même technique du "schéma m", ou plus directement ici la règle de sélection (D-21) détermine les configurations à deux neutrons 1d5/2, elles ont un isospin $I_{2t} = 1$ et un spin $I_{2j} = 0,2$ et 4 (Tab. 10). Par couplage de ces configurations à un nucléon 1d5/2, on construit les états de spin I_j suivants :

I_{2j}	I_j						
0			5/2				
2	1/2	3/2	5/2	7/2	9/2		
4		3/2	5/2	7/2	9/2	11/2	13/2

Eliminons les configurations d'isospin $I_t = 3/2$ obtenues dans la première étape (avec éventuellement leur multiplicité, ici 1), ce sont des états à trois neutrons. Les configurations restantes donnent les spins I_j possibles pour l'isospin $I_t = 1/2$, soit :

I_j	1/2	3/2	5/2	7/2	9/2	11/2	13/2
multiplicité	1	1	2	2	1	1	1

Ainsi, il existe un seul état à un proton et deux neutrons couplés à $I_j = I_t = 1/2$ on démontre qu'il en est de même pour $(2s^{1/2})^{3*}$ et $(1d^{3/2})^3$. Ce sont respectivement les configurations 1, 10 et 14 du Tableau 11 où le choix du couplage indiqué définit la phase de ces états.

D.2.2. Définition des "coefficients associés aux c.p.f.".

a) Par la suite nous exprimerons les éléments de matrice d'opérateurs à un (resp. deux) corps sur des états à N corps en fonction d'éléments de matrice à un (resp. deux) corps. Pour cela, dans les états $|\tilde{C}_N\rangle_n$ antisymétrisés à N particules, on isole explicitement les états individuels de l'un des espaces $\mathscr{E}^{(1)}$ du produit tensoriel $E^{(N)}$ (par exemple le $N^{ème}$), en développant cet état sous la forme suivante :

$$|\widetilde{C_N(1\cdots N)}\rangle_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{C_{N-1}, C_1} \mathscr{C}^{C_N}_{C_{N-1} C_1} \left(|C_{N-1}(1\cdots N-1)\rangle_n \, | C_1(N)\rangle \right), \qquad \text{(D-41)}$$

où C_{N-1} est une configuration à N-1 particules couplée avec la configuration individuelle C_1 au couplage global (spin, isospin) de C_N. Nous appelons "coefficients associés aux c.p.f." les facteurs $\mathscr{C}^{C_N}_{C_{N-1}C_1}$, car ils sont reliés aux

---

*Pour $(2s1/2)^3$ le résultat est évident, c'est un trou de proton dans la double couche complète 2s1/2 (D.1.2b2).

"coefficients de parentage fractionnel" (c.p.f.) définis pour des états à N particules de même nombre quantique $j(n,\ell,j)$. Pour trois particules, nous avons (26.10[55]) :

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \mathcal{C}^{j^3 \alpha J}_{j^2(J_1),\, j} = \left[j^2(J_1)\, jJ \right\} j^3 \alpha J \Big] \quad . \tag{D-42}$$

Dans le cas d'un état $|\widetilde{C_N}\rangle_n = |\widetilde{j_1, \ldots, j_n}\rangle_n$ de particules indépendantes les coefficients $\mathcal{C}$ se réduisent à une phase, le développement (D-41) s'identifiant alors en terme de fonctions d'onde au développement d'un déterminant de Slater suivant une ligne. Par contre pour un état couplé, le développement (D-41) implique des changements de couplage. De plus, le dénombrement et la normalisation des configurations C_{N-1} peut, à cause des règles de sélection (D.1.2b), poser des problèmes dans le cas d'états individuels de même nombre quantique $j(n,\ell,j)$.

b) Calcul des "coefficients associés aux c.p.f." pour un état de couches complètes identiques en protons et neutrons.

Un tel état antisymétrisé est couplé à un spin et isospin nuls (D.1.2b2) et la configuration de trou, obtenue en enlevant l'état individuel jm_j, tm_t, est couplée à $j\text{-}m_j$, $t\text{-}m_t$. Par suite, dans le développement (D-41), C_{N-1} et C_1 sont couplées en spin et isospin à zéro ; mettons en évidence ce couplage.

Considérons d'abord le cas d'un état formé d'une seule couche complète de protons et de neutrons, soit de $N = 2(2j+1)$ particules. La phase de cette configuration est définie (D.1.1) par le choix d'ordre des états individuels suivant :

$$|\widetilde{C(1,\cdots,N)}\rangle_n = \tag{D-43}$$

$$\frac{1}{\sqrt{N!}}\, \mathcal{A}\, |j^-_{(1)}, \cdots, m^-_{(j+1-m^-)}, \cdots, -j^-_{(2j+1)}, -j^+_{(2j+2)} \cdots, m^+_{(3j+2+m^+)}, \cdots, j^+_{(4j+2)}\rangle$$

où ne figurent que les nombres quantiques m_j et $m_t = \pm 1/2$ notés par les indices $\pm$. Pour séparer les états individuels du $N^{\text{ème}}$ espace $\mathcal{E}^{(1)}$ écrivons (D-43) sous la forme :

$$|\widetilde{C(1,\cdots,N)}\rangle_n =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2(2j+1)}} \Big\{ |\widetilde{j^-_{(1)}, \cdots, m^-, \cdots, -j^-_{(2j+1)}, -j^+, \cdots, m^+, \cdots, j\text{-}1^+_{(N-1)}}\rangle_n\, |j^+(N)\rangle$$

$$- \sum_{m,\alpha=\pm} |\widetilde{j^-_{(1)}, \cdots, m\text{-}1^\alpha, j^+, m+1^\alpha, \cdots, j\text{-}1^+_{(N-1)}}\rangle_n\, |m^\alpha(N)\rangle \Big\} , \tag{D-44}$$

explicitant ainsi l'opérateur d'antisymétrisation partiel entre les états antisymétrisés à N-1 particules et l'état isolé. On rétablit l'ordre standard

(D-43) dans les configurations à N-1 particules par un produit de $4j + 1 - (j+1 - m^-)$ (resp. $4j+1 - (3j+2+m^+)$) transpositions, soit en introduisant la phase $(-)^{j-m^-}$ (resp. $(-)^{j+m^+}$). Incluant le signe - devant $\sum_{m,\alpha}$, cette phase s'écrit $(-)^{j+m_j}(-)^{1/2+m_t}$ qui est, à un facteur près, le produit des coefficients de Clebsch-Gordan de couplage en spin et isospin à zéro :

$$(-)^{j+m_j}(-)^{1/2+m_t} = \sqrt{2j+1}\ \sqrt{2}\ (jj-m_j\, m_j\,|00)(1/2\,1/2-m_t\, m_t\,|00), \quad \text{(D-45)}$$

$$|\widetilde{C(1,\cdots,N)\,00}\rangle_n = \Big(|\widetilde{\text{trou}\ j\ 1/2\,(1,\cdots,N-1)}\rangle_n\ |j\ 1/2\ (N)\rangle\Big)00\ . \quad \text{(D-46)}$$

Pour un état à plusieurs couches complètes (n,ℓ,j) $(N = \sum_n (2j+1)2)$, nous obtenons un développement analogue en choisissant l'ordre précédent des états individuels d'une même couche et un ordre arbitraire des couches (chaque couche comprenant un nombre pair, $2(2j+1)$, de particules, changer l'ordre entre couches n'introduit pas de phase). Le développement (D-41) s'écrit alors :

$$|\widetilde{C(1,\cdots,N)\,00}\rangle_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n\ell j} \sqrt{2j+1}\ \sqrt{2}\ \Big(|\widetilde{\text{trou}\ n\ell j\ 1/2\,(1\cdots,N-1)}\rangle_n\, |n\ell j\ 1/2\,(N)\rangle\Big)00. \quad \text{(D-47)}$$

c) Calcul des "coefficients associés au c.p.f." pour les configurations $|\widetilde{C_3\ 1/2\ 1/2}\rangle_n$ (Tab. 11). Nous distinguons les trois cas suivants :

1 - Les états individuels j_1, j_2 et j_3 sont tous différents. Les configurations sont alors définies par (D-40) et en développant l'opérateur d'antisymétrisation partiel $\mathcal{A}(2,1)$, elles s'écrivent :

$$\begin{aligned}|\widetilde{(\widetilde{j_1(1)\ j_2(2)})\ I_2\ j_3(3)}\ 1/2\rangle_n = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big[&\Big(|\widetilde{(\widetilde{j_1(1)\ j_2(2)})\ I_2}\rangle_n\ |j_3(3)\rangle\Big)\ 1/2 \\ &-\Big(|\widetilde{(\widetilde{j_1(1)\ j_2(3)})\ I_2}\rangle_n\ |j_3(2)\rangle\Big)\ 1/2 \\ &+\Big(|\widetilde{(\widetilde{j_1(2)\ j_2(3)})\ I_2}\rangle_n\ |j_3(1)\rangle\Big)\ 1/2\Big]\ , \end{aligned} \quad \text{(D-48)}$$

où j_i (de même que 1/2) indique le spin et l'isospin.

Pour isoler dans les deux derniers termes, les états individuels d'indice (3), on explicite l'antisymétrisation des configurations à deux particules définies par (D-32), et sur les vecteurs à trois particules non antysimétrisées, on change les couplages par les "9 j carrés" (B.6). Soit pour le deuxième terme :

$$\left(|(\widetilde{j_1(1)\, j_2(3)})I_2\rangle_n\, |j_3(2)\rangle\right)1/2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(|(j_1(1)\, j_2(3))I_2\rangle |j_3(2)\rangle\right)1/2 - \left(|(j_1(3)\, j_2(1))I_2\rangle |j_3(2)\rangle\right)1/2\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_\lambda \left\{ \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & I_2 \\ j_3 & 0 & j_3 \\ \lambda & j_2 & 1/2 \end{bmatrix} \left(|(j_1(1)\, j_3(2))\lambda\rangle |j_2(3)\rangle\right)1/2 \right.$$

$$\left. - (-)^{j_1+\lambda-1/2} \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & I_2 \\ 0 & j_3 & j_3 \\ j_1 & \lambda & 1/2 \end{bmatrix} \left(|(j_2(1)\, j_3(2))\lambda\rangle |j_1(3)\rangle\right)1/2 \right\}, \quad \text{(D-49)}$$

où les "9j carrés" ainsi que la phase $(-)^{j_1+\lambda-1/2}$ sont en fait le produit des coefficients correspondants pour le spin et l'isospin.
Le troisiéme terme de (D-48) s'obtient à partir du précédent, en échangeant les indices (1) et (2) et avec un changement de signe général. En sommant ces deux derniers termes on obtient donc une expréssion analogue à (D-49) où les configurations à deux particules sont antisymétrisées et normalisées par le facteur $1/\sqrt{2}$. D'où le développement cherché :

$$|((\widetilde{j_1(1)\, j_2(2)})I_2\, j_3(3))1/2\rangle_n = \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\left(|(\widetilde{j_1(1)}\, j_2(2))I_2\rangle_n |j_3(3)\rangle\right)1/2\right.$$

$$\left. - \sum_\lambda \left(\begin{bmatrix} j_1 & j_2 & I_2 \\ j_3 & 0 & j_3 \\ \lambda & j_2 & 1/2 \end{bmatrix} \left(|(\widetilde{j_1(1)\, j_3(2)})\lambda\rangle_n |j_2(3)\rangle\right)1/2 - (-)^{j_1+\lambda-1/2} \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & I_2 \\ 0 & j_3 & j_3 \\ j_1 & \lambda & 1/2 \end{bmatrix} \left(|(\widetilde{j_2(1)\, j_3(2)})\lambda\rangle_n |j_1(3)\rangle\right)1/2 \right) \right\} . \quad \text{(D-50)}$$

2- Les états individuels j_1 et j_2 sont égaux à j et différents de j_3. La démarche est la même que précédemment mais le calcul est simplifié car dans le développement (D-48), les configurations à deux particules s'écrivent :

$$|(\widetilde{j_1(1)\, j_2(2)})\, I_2\rangle_n = |(j(1)\, j(2))\, I_2\rangle ,$$

pourvu que I_2 satisfasse la règle de sélection (D-21).

D'où le développement :

$$|((\widetilde{j(1)\, j(2)})I_2\, j_3(3))1/2\rangle_n = \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\left(|(\widetilde{j(1)\, j(2)})I_2\rangle_n |j_3(3)\rangle\right)1/2\right.$$

$$\left. - \sqrt{2}\sum_\lambda \begin{bmatrix} j & j & I_2 \\ j_3 & 0 & j_3 \\ \lambda & j & 1/2 \end{bmatrix} \left(|(\widetilde{j(1)\, j_3(2)})\lambda\rangle_n |j(3)\rangle\right)1/2 \right\} , \quad \text{(D-51)}$$

où le facteur $\sqrt{2}$ compense la normalisation $1/\sqrt{2}$ de $|(\widetilde{j(1)\, j_3(2)})\lambda\rangle_n$.

Remarque : dans les deux cas précédents, on peut être amené à changer l'ordre des états individuels j_α et j_β des configurations à deux particules de façon à rétablir l'ordre standard du tableau 10. Cela introduit la phase $-(-)^{j_\alpha + j_\beta - \lambda}$ en spin et isospin (D-20).

3- Les trois états individuels sont égaux à j. Ces configurations antisymétrisées s'écrivent sous la forme (D-48), mais les trois termes de ce développement n'étant pas orthogonaux, la normalisation n'est plus assurée par le facteur de comptage $1/\sqrt{3}$. On doit explicitement calculer la norme :

$$\mathcal{N} = \langle ((j(1)\widetilde{j(2)})I_2\, j(3))1/2 \,|\, ((j(1)\widetilde{j(2)})I_2\, j(3))1/2 \rangle \quad . \tag{D-52}$$

Les changements de couplage sont analogues au cas précédent, soit :

$$|((j(1)\widetilde{j(2)})I_2\, j(3))1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \left(|(j(1)\widetilde{j(2)})I_2\rangle_n\, |j(3)\rangle\right)1/2 - 2\sum_\lambda \begin{bmatrix} j & j & I_2 \\ j & 0 & j \\ \lambda & j & 1/2 \end{bmatrix} \left(|(j(1)\widetilde{j(2)})\lambda\rangle_n\, |j(3)\rangle\right)1/2 \right\} , \tag{D-53}$$

où le facteur 2 compense la normalisation 1/2 de $|(j(1)\widetilde{j(2)})\lambda\rangle$ (cette configuration étant non nulle si λ satisfait la règle de sélection (D-21)). Après normalisation de cet état le développement cherché est :

$$|((j(1)\widetilde{j(2)})I_2\, j(3))1/2\rangle_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_\lambda \frac{1}{\sqrt{c\rho}} \left(\delta_{\lambda I_2} - 2\begin{bmatrix} j & j & I_2 \\ j & 0 & j \\ \lambda & j & 1/2 \end{bmatrix}\right) \left(|(j(1)\widetilde{j(2)})\lambda\rangle_n\, |j(3)\rangle\right)1/2 \quad . \tag{D-54}$$

Dans le programme numérique, ces "coefficients associés aux c.p.f." se présentent sous forme d'un tableau à trois indices (i,j,k) où i décrit les 14 configurations à trois particules (Tab. 11), j les 28 configurations à deux particules (Tab. 10) et k vaut 1,2 ou 3 suivant que l'état isolé est 1d5/2, 2s1/2 ou 1d3/2.

Ainsi, pour des composantes x (D-36) données, la couche externe de la cible de F^{19} s'exprime de la façon suivante :

$$|e(\widetilde{1,2,3})\, I\rangle_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{C_2, C_1} y_{C_2 C_1} \left(|C_2(\widetilde{1,2})\rangle_n\, |C_1(3)\rangle\right) I \quad , \tag{D-55}$$

où les composantes y définies par,

$$y_{C_2 C_1} = \sum_{C_3} x_{C_3}\, \mathcal{C}^{C_3}_{C_2 C_1} \quad , \tag{D-56}$$

satisfont :

$$\frac{1}{3} \sum_{c_2 c_1} y^2_{c_2 c_1} = 1 \quad . \tag{D-57}$$

D.2.3. Etats de l'ensemble cible plus projectile.

Les états à N particules considérés (II.1.2) s'écrivent comme la somme d'états à N-1 nucléons liés et un dans le continu :

$$|\widetilde{\Psi_d} J\rangle = \sum_{\gamma} |\widetilde{\gamma_\ell, \varphi_\gamma}\rangle_n \quad , \tag{D-58}$$

et d'états à N nucléons liés :

$$|\widetilde{\Psi_\ell} J\rangle = \sum_{\alpha} a_\alpha |\widetilde{\alpha}\rangle_n \quad . \tag{D-59}$$

Définissons chacun de ces états.

a) Etats à N-1 nucléons liés et un dans le continu.

Cette composante $|\widetilde{\Psi_d J}\rangle$ est obtenue par antisymétrisation et couplage à J d'un état $|\widetilde{\Phi I}\rangle_n$ de la cible avec un état individuel de diffusion $|\varphi j\rangle$ (II-28).

Par hypothèse $|\varphi j\rangle$ est un état du continu du potentiel à uncorps qui définit les états liés de la cible et par suite leur est orthogonal.

L'état de diffusion $|\widetilde{\Psi_d J}\rangle_n$ n'est pas normalisable, cependant, l'indice n indique que nous le définissons avec la norme de comptage $1/\sqrt{N}$ (D-33) :

$$|\widetilde{\gamma_\ell \varphi_\gamma}(1,\cdots,N) J\rangle_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \mathcal{A}(N-1,1) \left(|\widetilde{\Phi(1,\cdots,N-1) I}\rangle_n |\varphi(N) j\rangle \right) J \quad . \tag{D-60}$$

Ce choix de normalisation définit les composantes a_α des états à N nucléons liés (D-59).

b) Etats à N nucléons liés.

Nous nous limitons aux deux cas suivants :

1- On considère un état à N nucléons liés obtenu par antisymétrisation et couplage de la cible avec un état individuel j, non occupé dans la cible.

L'antisymétrisation n'introduit alors pas de règle de sélection et la normalisation est le facteur de comptage $1/\sqrt{N}$:

$$|\alpha\widetilde{(1,\cdots,N)}J\rangle_n = \frac{1}{\sqrt{N}}\,\mathcal{A}(N-1,1)\left(|\Phi\widetilde{(1,\cdots,N-1)}I\rangle_n |j(N)\rangle\right)J \quad . \tag{D-61}$$

Seul le cas $j = 2s1/2$ est examiné.

2- Pour l'étude de la diffusion de neutrons sur le F^{19}, nous considérons au chapitre V différents modèles pour décrire les états à vingt nucléons liés.

i) Détaillons le premier qui consiste à introduire une seule configuration, obtenue en antisymétrisant l'état fondamental du F^{19} avec l'état $j = 2s1/2$:

$$|\Psi_{\mathcal{E}}\widetilde{(1,\cdots,20)}J\rangle_n = \mathcal{N}\mathcal{A}(19,1)\left(|F^{19}\widetilde{(1,\cdots,19)}I\rangle_n |2s1/2(20)\rangle\right)J \quad , \tag{D-62}$$

où J prend les valeurs $I \pm 1/2 = 0,1$ et $T = 1$ (résultant du couplage de deux isospins 1/2 avec $M_T = -1$).

L'état 2s1/2 étant occupé dans certaines composantes de la couche externe $|\widetilde{e\ 1/2}\rangle$ (D-36), l'antisymétrisation introduit des règles de sélection. Nous les déterminons en construisant l'état de couche externe à quatre nucléons :

$$|E\widetilde{(1,2,3,4)}J\rangle_n = \frac{1}{\sqrt{4}}\,\mathcal{N}\mathcal{A}(3,1)\left(|e\widetilde{(1,2,3)}I\rangle_n |j(4)\rangle\right)J \quad , \tag{D-63}$$

sous la forme du développement suivant:

$$|E\widetilde{(1,2,3,4)}J\rangle_n = \frac{1}{\sqrt{6}}\sum_{C_2 C_2'} z_{C_2 C_2'}\left(|C_2\widetilde{(1,2)}\rangle_n |C_2'\widetilde{(3,4)}\rangle_n\right)J \quad , \tag{D-64}$$

où C_2 et C_2' sont des configurations à deux nucléons du tableau 10. Les coefficients z sont des "coefficients associés aux c.p.f." (D.2.2) permettant d'isoler les états individuels de deux espaces $\mathcal{E}^{(1)}$.

Afin de déterminer ces coefficients z, explicitons l'opérateur d'antisymétrisation partiel $\mathcal{A}(3,1)$ de (D-63) en omettant les couplages et ne faisant figurer que les indices, entre parenthèses, de rang des espaces individuels (D-4) :

$$|E\widetilde{(1,2,3,4)}J\rangle_n = \frac{\mathcal{N}}{\sqrt{4}}\left(|\widetilde{1,2,3}\rangle_n |4\rangle - |\widetilde{1,2,4}\rangle_n |3\rangle + |\widetilde{1,3,4}\rangle_n |2\rangle - |\widetilde{2,3,4}\rangle_n |1\rangle\right) . \tag{D-65}$$

Suivant (D-18), l'ordre des indices des états antisymétrisés à trois particules des deux derniers termes peut être changé de la façon suivante :

$$|\widetilde{1,3,4}\rangle_n = |\widetilde{3,4,1}\rangle_n \quad , \quad |\widetilde{2,3,4}\rangle_n = |\widetilde{3,4,2}\rangle_n \, . \tag{D-66}$$

Développons alors, chacun des quatre termes de (D-65) à l'aide de (D-55) :

$$\begin{aligned} |E(\widetilde{1,2,3,4})J\rangle_n = \frac{\mathcal{N}}{\sqrt{4\times 3}} \sum_{C_2 C_1} y_{C_2 C_1} \Big\{ & [(|C_2(\widetilde{1,2})\rangle_n |C_1(3)\rangle) I \, | j(4)\rangle] J \\ & - [(|C_2(\widetilde{1,2})\rangle_n |C_1(4)\rangle) I \, | j(3)\rangle] J + [(|C_2(\widetilde{3,4})\rangle_n |C_1(1)\rangle) I \, | j(2)\rangle] J \\ & - [(|C_2(\widetilde{3,4})\rangle_n |C_1(2)\rangle) I \, | j(1)\rangle] J \Big\} \, . \end{aligned} \tag{D-67}$$

Désignons par $|(\widetilde{j_1 j_2}) I_2\rangle_n$ les configurations $|\widetilde{C_2}\rangle_n$ et par j_3 l'état individuel C_1. En changeant l'ordre des couplages en spin et isospin de façon à faire apparaître des configurations à deux nucléons antisymétrisés (j_3, j), il vient :

$$\begin{aligned} |E(\widetilde{1,2,3,4})J\rangle_n = \frac{\mathcal{N}}{\sqrt{4\times 3}} \sum_{C_2 C_1} y_{C_2 C_1} \sum_{\lambda} \begin{bmatrix} I_2 & j_3 & I \\ 0 & j & j \\ I_2 & \lambda & J \end{bmatrix} \\ \Big\{ [|C_2(\widetilde{1,2})\rangle_n |(j_3(\widetilde{3)} j(4)) \lambda\rangle] J + [|C_2(\widetilde{3,4})\rangle_n |(j_3(\widetilde{1)} j(2)) \lambda\rangle] J \Big\} \, , \end{aligned} \tag{D-68}$$

où les "9j carrés" (B.6) sont les produits des coefficients correspondants en spin et isospin.

Suivant (D-19), on rétablit dans les deux derniers termes l'ordre 1,2,3,4 à l'aide de la phase $(-)^{I_2 + \lambda - J}$ en spin et isospin. Faisons apparaître les états antisymétrisés et normalisés $|(\widetilde{j_3 j})\lambda\rangle_n$ par (D-32) :

$$|(\widetilde{j_3 j})\lambda\rangle = \sqrt{2(1+\delta_{j_3 j})} \; |(\widetilde{j_3 j})\lambda\rangle_n \quad , \tag{D-69}$$

d'où le développement :

$$\begin{aligned} |E(\widetilde{1,2,3,4})J\rangle_n = \frac{\mathcal{N}}{\sqrt{6}} \sum_{C_2 C_1} y_{C_2 C_1} \sum_{\lambda} \begin{bmatrix} I_2 & j_3 & I \\ 0 & j & j \\ I_2 & \lambda & J \end{bmatrix} \sqrt{1+\delta_{j_3 j}} \\ \Big\{ [|C_2(\widetilde{1,2})\rangle_n |(j_3(\widetilde{3)} j(4)) \lambda\rangle_n] J + (-)^{I_2+\lambda-J} [|(j_3(\widetilde{1)} j(2)) \lambda\rangle_n |C_2(\widetilde{3,4})\rangle_n] J \Big\} \, . \end{aligned} \tag{D-70}$$

Les coefficients z s'obtiennent en identifiant le développement précédent avec (D-64), soit :

- $C_2 \neq C_2' = (\, j_3\ j\,)\lambda$, $C_1 = j_3$,

$$\mathcal{Z}_{C_2C_2'} = \mathcal{N}\, y_{C_2C_1} \begin{bmatrix} I_2 & j_3 & I \\ 0 & j & j \\ I_2 & \lambda & J \end{bmatrix} \sqrt{1+\delta_{j_3 j}} \qquad = (-)^{I_2+\lambda-J}\, \mathcal{Z}_{C_2'C_2} \quad . \tag{D-71}$$

- $C_2 = C_2'$. Les deux états entre crochets de (D-70) sont identiques, par suite pour que cette composante soit non nulle, il est nécessaire que la phase $(-)^{I_2+\lambda-J}$ en spin et isospin soit égale à 1, c'est à dire J + T pair, alors :

$$\mathcal{Z}_{C_2C_2} = 2\mathcal{N}\, y_{C_2C_1} \begin{bmatrix} I_2 & j_3 & I \\ 0 & j & j \\ I_2 & I_2 & J \end{bmatrix} \sqrt{1+\delta_{j_3 j}} \quad , \tag{D-72}$$

avec $C_1 = j_3 = j_1$ et $j_2 = j$.

Dans notre cas, T=1 , ces composantes apparaissent uniquement pour J=1 .

Remarque : On peut être amené à changer l'ordre des états individuels j_3, j pour rétablir l'ordre standard du tableau 10, cela introduit la phase $-(-)^{j_3+j-\lambda}$ en spin et isospin (D-20).

Le coefficient de normalisation $\mathcal{N}$ s'obtient en calculant explicitement la norme de $|\widetilde{E}\rangle$,

$$1 = \frac{1}{6} \sum_{C_2C_2'} \mathcal{Z}^2_{C_2C_2'} \quad . \tag{D-73}$$

Remarquons que si l'état j n'est pas occupé dans $|\widetilde{e}\rangle_n$, nous sommes dans le cas 1- traité précédemment et $\mathcal{N} = 1$. Les coefficients $z_{C_2C_2}$ sont alors nuls car nécessairement $C_2 \neq C_2'$.

L'état à 20 nucléons liés est obtenu en antisymétrisant et couplant le coeur scalaire avec la couche externe $|\widetilde{E}\rangle_n$:

$$|\Psi_\ell(\widetilde{1,\cdots,20})\, J\rangle_n = \sqrt{\frac{16!\,4!}{20!}}\, \mathcal{A}(16,4) \left(|C(\widetilde{1,\cdots,16})\, 0\rangle_n\, |E(\widetilde{17,\cdots,20})\, J\rangle_n \right)^J \quad . \tag{D-74}$$

La normalisation étant assurée par le facteur de comptage (D-30).

ii) Enfin, l'espace des états à 20 nucléons liés sera étendu aux configurations à quatre nucléons dans la couche 2s-1d, incluant au moins un état $|2s1/2\rangle$, antisymétrisées et couplées en spin et isospin à (J = 0, T = 1) et (J = 1, T = 1).

L'antisymétrisation et les couplages limitent ces configurations à celles indiquées dans les tableaux 30 et 31.

Un calcul analogue au précédent permet de décomposer ces états $|E_\alpha \widetilde{(1,2,3,4)JT}\rangle_n$ sous la forme identique à (D-64) :

$$|E_\alpha \widetilde{(1,2,3,4)\,JT}\rangle_n = \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{C_2 C'_2} \mathcal{Z}^{\alpha\,JT}_{C_2 C'_2} \left(|\widetilde{C_2(1,2)}\rangle_n |\widetilde{C'_2(3,4)}\rangle_n \right) JT \,. \quad \text{(D-75)}$$

E. CALCUL DES ELEMENTS DE MATRICE

Après avoir exprimé les éléments de matrice d'opérateurs à un et deux corps sur des états à N corps antisymétrisés en fonction d'éléments de matrice à deux corps, on calculera ces derniers pour une force centrale dépendant de quatre paramètres de mélange a_o, a_σ, a_τ, $a_{\sigma\tau}$ et également pour la force de Coulomb.

Enfin on précisera les expressions des potentiels qui interviennent dans notre problème.

E.1. DECOMPOSITION EN SOMME D'ELEMENTS DE MATRICE A UN ET DEUX CORPS.

On se propose de calculer les éléments de matrice $M^{(1)}$ et $M^{(2)}$ d'opérateurs à un et deux corps $\mathcal{O}^{(1)}$ et $\mathcal{O}^{(2)}$:

$$\mathcal{O}^{(1)} = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{O}_i \quad , \quad \mathcal{O}^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} \mathcal{O}_{ij} = \sum_{i<j} \mathcal{O}_{ij} \quad \text{avec} \quad \mathcal{O}_{ij} = \mathcal{O}_{ji} \quad , \tag{E-1}$$

sur des états antisymétrisés couplés et normalisés à N corps $|\widetilde{C_N}\rangle_n$ (D).

L'antisymétrisation des vecteurs bra et ket permet d'exprimer $M^{(1)}$ et $M^{(2)}$ en fonction d'éléments de matrice des restrictions* des opérateurs $\mathcal{O}^{(1)}$ et $\mathcal{O}^{(2)}$ à des espaces individuels $\mathscr{E}^{(1)}$ déterminés, par exemple $\mathcal{O}_N$ et $\mathcal{O}_{N-1,N}$ respectivement pour $M^{(1)}$ et $M^{(2)}$. Cela introduit un facteur de comptage, soit :

$$M^{(1)} = N \lesssim_m \widetilde{C_N} | \mathcal{O}_N | \widetilde{C'_N} \rangle_m \quad ,$$
$$M^{(2)} = \frac{N(N-1)}{2} \lesssim_m \widetilde{C_N} | \mathcal{O}_{N-1,N} | \widetilde{C'_N} \rangle_m \quad . \tag{E-2}$$

Décomposons les états $|\widetilde{C_N}\rangle_n$ au moyen des "coefficients associés aux c.p.f." (D-41 et D-64) qui isolent les états des éspaces individuels N et N-1 :

$$|\widetilde{C_N}\rangle_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{C_{N-1},C_1} \mathcal{C}^{C_N}_{C_{N-1},C_1} \left(|\widetilde{C_{N-1}(1,\ldots,N-1)}\rangle_m | C_1(N)\rangle \right)$$
$$= \sqrt{\frac{2}{N(N-1)}} \sum_{C_{N-2},C_2} \mathcal{C}^{C_N}_{C_{N-2}\,C_2} \left(|\widetilde{C_{N-2}(1,\ldots,N-2)}\rangle_m | \widetilde{C_2(N-1,N)}\rangle_m \right) . \tag{E-3}$$

---

*Au lieu de $\mathcal{O}_N$ on devrait écrire $1_1 \otimes \ldots \otimes 1_{N-1} \otimes \mathcal{O}_N$ où 1_i est l'opérateur identité dans l'espace $\mathscr{E}^{(1)}_i$, même remarque pour $\mathcal{O}_{N-1,N}$.

Les configurations C_{N-1} et C_1 ainsi que C_{N-2} et C_2 restent couplées au couplage total en spin et isospin de C_N. Désignons par I_i les couplages d'une configuration C_i. En introduisant les développements précédents dans $M^{(1)}$ et $M^{(2)}$, les facteurs de normalisation et de couplage se simplifient, il vient :

$$M^{(1)} = \sum_{\substack{C_{N-1}\, C_1 \\ C'_{N-1}\, C'_1}} \mathcal{C}^{C_N}_{C_{N-1} C_1}\, \mathcal{C}^{C'_N}_{C'_{N-1} C'_1}\, \left(\langle\!\langle \widetilde{C}_{N-1} | \langle C_1(N)| \right) \mathcal{O}_N \left(|\widetilde{C'_{N-1}}\rangle\!\rangle_m |C'_1(N)\rangle \right), \tag{E-4}$$

$$M^{(2)} = \sum_{\substack{C_{N-2}\, C_2 \\ C'_{N-2}\, C'_2}} \mathcal{C}^{C_N}_{C_{N-2} C_2}\, \mathcal{C}^{C'_N}_{C'_{N-2} C'_2}\, \left(\langle\!\langle \widetilde{C}_{N-2} | \langle\!\langle C_2(\widetilde{N-1,N})| \right) \mathcal{O}_{N-1,N} \left(|\widetilde{C'_{N-2}}\rangle\!\rangle_m |C'_2(\widetilde{N-1,N})\rangle\!\rangle_m \right).$$

On sépare les éléments de matrice du membre de droite de (E-4) en un terme de recouvrement et un terme d'interaction. Pour cela on doit expliciter les couplages en spin et isospin entre les configurations C_{N-1} et C_1 (resp. C_{N-2} et C_2). Si l'opérateur considéré est scalaire en spin et isospin, on isole directement le terme d'interaction en utilisant le Théorème de Wigner-Eckart (B-52) et la formule de réduction du produit tensoriel (B-55) pour l'opérateur $1_{1\ldots N-1} \otimes \mathcal{O}^{[0]}_N$; d'où dans ce cas :

$$M^{(1)} = \sum_{C_{N-1}\, C_1\, C'_1} \mathcal{C}^{C_N}_{C_{N-1} C_1}\, \mathcal{C}^{C'_N}_{C_{N-1} C'_1}\, \langle C_1 | \mathcal{O} | C'_1 \rangle ,$$

$$M^{(2)} = \sum_{C_{N-2}\, C_2\, C'_2} \mathcal{C}^{C_N}_{C_{N-2} C_2}\, \mathcal{C}^{C'_N}_{C_{N-2} C'_2}\, \langle\!\langle \widetilde{C}_2 | \mathcal{O} | \widetilde{C}'_2 \rangle\!\rangle_m . \tag{E-5}$$

E.2. CALCUL DES ELEMENTS DE MATRICE A DEUX CORPS PARTICULE-PARTICULE.

E.2.1. Expression en fonction des éléments de matrice direct .

Soit à calculer l'élément de matrice de l'opérateur à deux corps $\mathcal{O}^{(2)}$ sur des états à deux corps antisymétrisés couplés et normalisés :

$$M = \langle\!\langle (a\widetilde{(1)}\, b(2))J | \mathcal{O}^{(2)} | (c(1)\widetilde{d(2)})\, J' \rangle\!\rangle_m , \tag{E-6}$$

où a, b, c, d indiquent tous les nombres quantiques nécessaires pour définir les états individuels (C-25,26) et J et J' les couplages en spin et isospin. On suppose l'opérateur $\mathcal{O}^{(2)}$ symétrique, $\mathcal{O}_{ij} = \mathcal{O}_{ji}$, par suite, séparant les problèmes de normalisation et d'antisymétrisation des états à deux particules (D-32), on peut antisymétriser un seul des états bra ou ket, par exemple le ket :

$$M = \frac{1}{\sqrt{1+\delta_{ab}}\sqrt{1+\delta_{cd}}} \langle (a(1)b(2))J \mid \mathcal{O}_{1,2}\, \mathcal{A} \mid (c(1)d(2))J' \rangle . \qquad \text{(E-7)}$$

Désignons par $\mathcal{D}_{abcd}$ le terme direct de M :

$$\mathcal{D}_{abcd} = \langle (a(1)b(2))J \mid \mathcal{O}_{1,2} \mid (c(1)d(2))J' \rangle \quad . \qquad \text{(E-8)}$$

1) Si a ≠ b et c ≠ d, M est la somme du terme direct (E-8) et du terme d'échange :

$$\mathcal{E}_{abcd} = - \langle (a(1)b(2))J \mid \mathcal{O}_{1,2} \mid (c(2)d(1))J' \rangle \quad . \qquad \text{(E-9)}$$

En changeant l'ordre de couplage des états du ket, ce terme d'échange s'exprime en fonction d'un terme direct, soit en couplage j-j :

$$\mathcal{E}_{abcd} = (-)^{j_c + j_d - J' - T'} \mathcal{D}_{abdc} \quad , \qquad \text{(E-10)}$$

où nous avons explicité, la phase en spin et isospin.

D'où l'expression de M en fonction de termes directs :

$$M = \mathcal{D}_{abcd} + (-)^{j_c + j_d - J' - T'} \mathcal{D}_{abdc} \quad . \qquad \text{(E-11)}$$

2) Si a = b ou c = d, il n'est pas nécessaire de calculer le terme d'échange. En effet, par exemple si c = d, en couplage j-j :

$$\mathcal{A} \mid (c(1)d(2))J' \rangle = (1 + (-)^{j_c + j_d - J' - T'}) \mid (c(1)d(2))J' \rangle \quad , \qquad \text{(E-12)}$$

où la règle de sélection (D-21) apparaît. Dans ce cas, l'expression de l'élément de matrice est :

$$M = \frac{2}{\sqrt{1+\delta_{ab}}\sqrt{1+\delta_{cd}}} \mathcal{D}_{abcd} \quad , \quad \text{avec J + T impair .} \qquad \text{(E-13)}$$

E.2.2. Calcul de l'élément de matrice direct particule-particule.

On considère un opérateur à deux corps dont la dépendance spatiale est dans la variable relative $r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$. Pour un tel calcul il existe deux démarches symétriques :

- Soit effectuer un changement de variables d'espace sur les fonctions d'onde en passant de $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ aux variables relatives $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ et du centre de masse $(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)/2$. Cette méthode est limitée aux fonctions radiales d'oscillateur harmonique, stables dans ce changement de variables qui s'effectue alors au moyen de coefficients de Moshinsky[56]. Cette méthode peut cependant être généralisée dans le cadre du formalisme hypersphérique[57].

- Soit faire un développement multipolaire de l'interaction pour séparer les variables 1 et 2. C'est cette dernière méthode que nous exposons.

Nous nous limitons à l'étude d'une force centrale du type (III-27) :

$$\mathcal{O}^{(2)} = V(r_{12})\,(a_o + a_\sigma\, \vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2 + a_\tau\, \vec{\tau}_1\cdot\vec{\tau}_2 + a_{\sigma\tau}\, \vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2\ \vec{\tau}_1\cdot\vec{\tau}_2) \quad , \qquad \text{(E-14)}$$

et à la force de Coulomb* :

$$\mathcal{O}^{(2)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\ \frac{e^2}{r_{12}}\ (1/2 + t_3(1))\ (1/2 + t_3(2)) \quad , \qquad \text{(E-15)}$$

où la partie isospin correspond au projecteur (C-9) sur les états à deux protons.

Pour calculer l'élément de matrice direct (E-8) on décompose $\mathcal{O}^{(2)}$ en sommes de produits d'opérateurs tensoriels irréductibles agissant séparément sur les variables d'espace, de spin et d'isospin, puis nous utilisons la formule de réduction du produit tensoriel (B-55).

a) Développement multipolaire de la partie spatiale $V(r_{12})$.

La variable relative $r_{12} = (r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos\omega_{12})^{1/2}$ dépend de r_1, r_2 et de $\cos\omega_{12}$ où ω_{12} est l'angle entre $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$.

Les polynômes de Legendre $P_\ell(u)$ forment un système complet orthogonal de polynômes définis sur le segment (-1, +1); ils satisfont la relation d'orthogonalité[58] :

$$\int_{-1}^{+1} P_k(u)\, P_\ell(u)\, du = \frac{2}{2\ell+1}\ \delta_{k\ell} \quad . \qquad \text{(E-16)}$$

Décomposons $V(r_{12})$ en série de polynômes de Legendre de la variable $\cos\omega_{12}$:

$$V(r_{12}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1)\, V_\ell(r_1, r_2)\, P_\ell(\cos\omega_{12}) \quad , \qquad \text{(E-17)}$$

---

*La force de Coulomb exprimée en MeV et la distance en fm, nous avons :

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o}\ \frac{1}{r_{12}}\ (\text{Mev}) = 1.440\ \frac{1}{r_{12}\,(\text{fm})} \quad .$$

avec

$$V_\ell(r_1,r_2) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} P_\ell(\cos\omega_{12})\, V(r_{12})\, d(\cos\omega_{12}) \qquad \text{(E-18)}$$

Indiquons les expressions respectives de $V_\ell(r_1,r_2)$ pour une force δ, gaussienne, de Yukawa et de Coulomb :

$V(r_{12})$	$V_\ell(r_1,r_2)$
$\delta(\vec{r}_1-\vec{r}_2)$	$\frac{1}{4\pi}\,\frac{\delta(r_1-r_2)}{r_1^2}$
$e^{-\left(\frac{r_{12}}{\mu}\right)^2}$	$(-i)^\ell j_\ell\left(i\,\frac{2r_1r_2}{\mu^2}\right) e^{-\frac{r_1^2+r_2^2}{\mu^2}}$
$\frac{e^{-r_{12}/\mu}}{r_{12}/\mu}$	$i\, j_\ell\left(i\,\frac{r_<}{\mu}\right) h_\ell^+\left(i\,\frac{r_>}{\mu}\right)$
$\frac{1}{r_{12}}$	$\frac{1}{2\ell+1}\,\frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}}$

(E-19)

où j_ℓ et h_ℓ^+ sont les fonctions de Bessel sphériques de première et de troisième espèce[58] et :

$$r_< = \inf(r_1, r_2) \quad , \quad r_> = \sup(r_1, r_2) \ .$$

Exprimons $P_\ell(\cos\omega_{12})$ en fonction du produit couplé à zéro (correspondant au caractère scalaire d'espace de $V(r_{12})$) des harmoniques sphériques (B-41) des directions $\hat{r}_1$ et $\hat{r}_2$:

$$P_\ell(\cos\omega_{12}) = \frac{4\pi}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{+\ell} Y_m^{\ell *}(\hat{r}_1)\, Y_m^\ell(\hat{r}_2) = \frac{4\pi}{\hat{\ell}}\left[Y^\ell(\hat{r}_1)\, Y^\ell(\hat{r}_2)\right]_0^0 \ . \qquad \text{(E-20)}$$

D'où le développement multipolaire de $V(r_{12})$:

$$V(r_{12}) = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} V_\ell(r_1,r_2)\, \hat{\ell}\, \left[Y^\ell(\hat{r}_1)\, Y^\ell(\hat{r}_2)\right]_0^0 \ . \qquad \text{(E-21)}$$

b) Séparation dans l'interaction des variables 1 et 2 de spin et d'isospin.

1 - Dans le cas de la force de Coulomb, l'opérateur n'agit pas sur le spin, et la partie isospin se réduit au projecteur sur l'état à deux protons, d'où

la règle de sélection pour l'élément de matrice à deux corps :

$$T = T' = M_T = M_{T'} = 1$$

Cet opérateur d'isospin est un mélange d'opérateurs tensoriels de rang zéro, un (B-42) et deux :

$$(1/2+t_3(1))(1/2+t_3(2)) = \frac{1}{4} + \frac{i}{2} T^1_0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[(t^1(1)t^1(2))^0_0 - \sqrt{2}(t^1(1)t^1(2))^2_0 \right] . \quad \text{(E-22)}$$

et tous de projection d'isospin zéro correspondant à la conservation de la charge.

2 - Dans le cas de la force centrale (E-14) donnons une expression de la partie spin et isospin analogue au développement multipolaire pour la partie d'espace. Pour cela introduisons les opérateurs vectoriels, définis par (B-42)*, σ^1 et τ^1 en généralisant les notations :

$$\sigma^\mu = \begin{cases} 1 & \mu = 0 \\ \sigma^1 & \mu = 1 \end{cases} , \quad \text{idem pour } \tau^\nu , \quad \text{(E-23)}$$

de plus désignons globalement par $a_{\mu\nu}$ les paramètres a_o, a_σ, a_τ, $a_{\sigma\tau}$:

$a_{\mu\nu}$ =

μ \ ν	0	1
0	a_o	a_τ
1	a_σ	$a_{\sigma\tau}$

(E-24)

En utilisant l'expression (B-43) du produit scalaire, on obtient la forme générale pour la force centrale (E-14) où les variables d'espace, de spin et d'isospin sont traitées de facon identique :

$$O^{(2)} = 4\pi \sum_{\ell\mu\nu} V_\ell(r_1, r_2)\, a_{\mu\nu}\, \hat{\ell}\hat{\mu}\hat{\nu}\, \left(Y^\ell(1) Y^\ell(2) \right)^0 \left(\sigma^\mu(1)\, \sigma^\mu(2) \right)^0 \left(\tau^\nu(1)\, \tau^\nu(2) \right)^0 . \quad \text{(E-25)}$$

Les variables d'espace et de spin se regroupent de la façon suivante :

$$\left[Y^\ell_{(1)}\, Y^\ell_{(2)} \right]^0 \left[\sigma^\mu(1)\, \sigma^\mu(2) \right]^0 = \sum_J \begin{bmatrix} \ell & \ell & 0 \\ \mu & \mu & 0 \\ J & J & 0 \end{bmatrix} \left(\left(Y^\ell_{(1)}\, \sigma^\mu(1) \right)^J \left(Y^\ell(2)\, \sigma^\mu(2) \right)^J \right)^0 . \quad \text{(E-26)}$$

---

*Nous omettons les crochets pour indiquer la variance (B.4.2), toutes les grandeurs considérées appartiennent à la représentation $\mathcal{D}^j$.

c) Séparation des variables 1 et 2 dans l'élément de matrice.

Compte tenu des développements précédents, le terme direct de la force centrale (E-14) s'écrit :

$$\mathcal{D}_{abcd}=\frac{4\pi}{\hat{J}\hat{T}}\sum_{\ell\mu J\nu} a_{\mu\nu}\mathcal{R}^{\ell}_{abcd}\,\hat{J}\,[(j_a j_b)J\,\|\,((Y^{\ell}_{(1)}\sigma^{\mu}_{(1)})^{J}(Y^{\ell}_{(2)}\sigma^{\mu}_{(2)})^{J}\,)^{0}\,\|$$

$$(j_c j_d)J][(t_a t_b)T\,\|\,\hat{v}(\tau^{\nu}(1)\tau^{\nu}(2))^{0}\,\|\,(t_c t_d)T]\,, \qquad \text{(E-27)}$$

où $\mathcal{R}^{\ell}_{abcd}$ est l'intégrale radiale (ou de Slater) :

$$\mathcal{R}^{\ell}_{abcd}=\int_0^{\infty} r_1^2\,dr_1\int_0^{\infty} r_2^2\,dr_2\;\phi_a(r_1)\phi_b(r_2)V_{\ell}(r_1,r_2)\phi_c(r_1)\phi_d(r_2)\quad . \qquad \text{(E-28)}$$

Les éléments de matrice réduits sont ceux définis par le théorème de Wigner-Eckart (B-52).

La formule de réduction du produit tensoriel (B-55) permet de séparer les variables 1 et 2 :

- l'élément de matrice réduit d'espace et de spin s'écrit :

$$[(j_a j_b)J\,\|\,((Y^{\ell}_{(1)}\sigma_{(1)})^{\mu})^{J}(Y^{\ell}_{(2)}\sigma_{(2)})^{\mu})^{J})^{0}\,\|\,(j_c j_d)J]$$

$$=\begin{bmatrix} j_a & j_b & J\\ J & J & 0\\ j_c & j_d & J\end{bmatrix}\frac{\hat{J}}{\hat{j}_c\,\hat{j}_d}\,[j_a\,\|\,(Y^{\ell}\sigma^{\mu})^{J}\,\|\,j_c][j_b\,\|\,(Y^{\ell}\sigma^{\mu})^{J}\,\|\,j_d]\quad . \qquad \text{(E-29)}$$

Les éléments de matrice réduits à un corps se calculent en séparant de la même façon les variables d'espace et de spin :

$$[j_a\,\|\,(Y^{\ell}\sigma^{\mu})^{J}\,\|\,j_c]=\begin{bmatrix} \ell_a & \frac{1}{2} & j_a\\ \ell & \mu & J\\ \ell_c & \frac{1}{2} & j_c\end{bmatrix}\frac{\hat{j}_c}{\hat{\ell}_c\,\hat{1/2}}[\ell_a\,\|\,Y^{\ell}\,\|\,\ell_c][1/2\,\|\,\sigma^{\mu}\,\|\,1/2]\quad . \qquad \text{(E-30)}$$

- Pour l'élément de matrice réduit d'isospin, cette séparation s'écrit :

$$[(t_a t_b)T\,\|\,(\tau(1)^{\nu}\tau(2)^{\nu})^{0}\,\|\,(t_c t_d)T]=$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & T\\ \nu & \nu & 0\\ 1/2 & 1/2 & T\end{bmatrix}\frac{\hat{T}}{\hat{\frac{1}{2}}\,\hat{\frac{1}{2}}}\;\left([1/2\,\|\,\tau^{\nu}\,\|\,1/2]\right)^2\quad . \qquad \text{(E-31)}$$

Les valeurs des éléments de matrice réduits des harmoniques sphériques ainsi que celles des opérateurs de spin et isospin sont données par (B-53).

Regroupant ces résultats, nous obtenons l'expression de l'élément de matrice direct de la force centrale (E-14) :

$$\mathcal{D}_{abcd} = \sum_{\ell\mu\nu} \mathcal{R}^{\ell}_{abcd}\, a_{\mu\nu}\, A_{T\nu}\, B_{\mu}\, (-)^{\frac{1}{2}(\ell_a-\ell_b-\ell_c+\ell_d)}(2\ell+1)$$
$$(\ell\ell_c 00|\ell_a 0)(\ell\ell_d 00|\ell_b 0) \sum_{J} \hat{J} \begin{bmatrix} j_a & j_b & J \\ J & J & 0 \\ j_c & j_d & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_a & \frac{1}{2} & j_a \\ \ell & \mu & J \\ \ell_c & \frac{1}{2} & j_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_b & \frac{1}{2} & j_b \\ \ell & \mu & J \\ \ell_d & \frac{1}{2} & j_d \end{bmatrix} \quad \text{(E-32)}$$

avec :

$$A_{T\nu} = \begin{array}{c|c|c|c} T \backslash \nu & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & -3 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad , B_{\mu} = \begin{cases} 1 & \mu = 0 \\ -3 & \mu = 1 \end{cases}$$

d) Cas de la force de Coulomb.

Le traitement de la partie isospin se fait directement par la règle de sélection $T = M_T = 1$.

Le calcul de la partie spatiale et spin est identique au cas précédent pour a_o ($\mu = \nu = 0$) indépendant du spin et de l'isospin ; d'où le résultat :

$$\mathcal{D}_{abcd} = \delta_{T=M_T=1} \sum_{\ell} \mathcal{R}^{\ell}_{abcd}\, (-)^{\frac{1}{2}(\ell_a-\ell_b-\ell_c+\ell_d)}(2\ell+1)\,\hat{\ell}$$
$$(\ell\ell_c 00|\ell_a 0)(\ell\ell_d 00|\ell_b 0) \begin{bmatrix} j_a & j_b & J \\ \ell & \ell & 0 \\ j_c & j_d & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_a & \frac{1}{2} & j_a \\ \ell & 0 & \ell \\ \ell_c & \frac{1}{2} & j_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_b & \frac{1}{2} & j_b \\ \ell & 0 & \ell \\ \ell_d & \frac{1}{2} & j_d \end{bmatrix} . \quad \text{(E-33)}$$

E.3. CALCUL DES POTENTIELS DU PROBLEME.

Les éléments de matrice sur les états à N particules que nous considérons sont de trois types :

1 - $\quad {}_n\langle\tilde{\alpha}|\, \mathcal{O}^{(2)}\, |\tilde{\alpha}'\rangle_n$,

2 - $\quad {}_n\langle\tilde{\alpha}|\, \mathcal{O}^{(2)}\, |\tilde{\gamma}_\ell\rangle_n |ri\rangle\, \sqrt{N}$,

3 - $\quad \langle\gamma_\ell\,,\, ri|\, \mathcal{O}^{(2)}\, |\widetilde{\gamma'_\ell\,,\, r'i'}\rangle$,

où $|\tilde{\alpha}\rangle_n$ et $|\tilde{\gamma}_\ell\rangle_n$ sont respectivement des états à N et N-1 nucléons liés, $|ri\rangle$ est état propre de $|\vec{r}|$ et i désigne les autres nombres quantiques (ℓ, j, m_j, r, m_t) qui définissent cet état individuel.

En (E.1), nous avons vu comment réduire ces calculs à des sommes d'éléments de matrice à deux corps. Nous précisons les deux points suivants :

- calculs des éléments de matrice à deux corps avec des états $|ri\rangle$.
- séparation des contributions coeur-coeur, coeur-externe et externe-externe.

E.3.1. Eléments de matrice à deux corps comprenant des états $|ri\rangle$.

La décomposition (E-5) des éléments de matrice 2 et 3 ci-dessus conduit respectivement aux éléments de matrice suivants :

$$m = \langle (\widetilde{a(1), b(2)})J \,|\, \mathcal{O}_{1,2} \,|\, (c(1), ri(2))J' \rangle \quad , \qquad \text{(E-34)}$$

$$m' = \langle (a(1), ri(2))J \,|\, \mathcal{O}_{1,2} \,|\, (\widetilde{c(1), r'i'(2)})J' \rangle \quad . \qquad \text{(E-35)}$$

Remarque : l'état $|ri\rangle$, état propre de $|\vec{r}|$ n'est pas normalisable, cependant les états à N particules incluant cet état sont définis avec la norme de comptage $1/\sqrt{N}$ (analogue à (D-60)).

Les expressions (E-32) et (E-33) des éléments de matrice à deux corps sont inchangées. Seule l'intégrale radiale (E-28) est modifiée par la nature particulière de la fonction d'onde radiale de l'état $|ri\rangle$:

$$f_r(r') = \langle r'i \,|\, ri \rangle = \frac{\delta(r-r')}{r^2} \quad . \qquad \text{(E-36)}$$

Ces intégrales radiales directe et d'échange s'écrivent alors respectivement, pour les éléments de matrice m :

$$\mathcal{R}^{\ell}_{a,b,c,ri} = \int_0^\infty r_1^2 \, dr_1 \, f_a(r_1) f_b(r) \, V_\ell(r_1, r) \, f_c(r_1) \quad , \qquad \text{(E-37)}$$

$$\mathcal{R}^{\ell}_{b,a,c,ri} = \int_0^\infty r_1^2 \, dr_1 \, f_b(r_1) f_a(r) \, V_\ell(r_1, r) \, f_c(r_1) \quad , \qquad \text{(E-38)}$$

et pour les éléments de matrice m' :

$$\mathcal{R}^{\ell}_{a,ri,c,r'i'} = \frac{\delta(r-r')}{r^2} \int_0^\infty r_1^2 \, dr_1 \, f_a(r_1) V_\ell(r_1, r) f_c(r_1) \quad , \qquad \text{(E-39)}$$

$$\mathcal{R}^{\ell}_{a,ri,r'i',c} = f_a(r) \, V_\ell(r, r') \, f_c(r') \quad . \qquad \text{(E-40)}$$

En reportant les expressions précédentes dans les Eqs. (E-32) et (E-11) des éléments de matrice à deux corps, m et m' s'expriment de la façon suivante :

$$m = w_{abci}(r) \quad , \tag{E-41}$$

$$m' = \frac{\delta(r-r')}{r^2} v^{L}_{aici'}(r) + v^{NL}_{aici}(r,r') \quad . \tag{E-42}$$

A partir du développement (E-5), les éléments de matrice de types 2 et 3 s'écrivent donc sous la forme des potentiels locaux et non-locaux suivants :

$$\langle \widetilde{\alpha} \mid \mathcal{O}^{(2)} \mid \widetilde{\gamma}_\ell \rangle_m | ri\rangle \sqrt{N} = W_{\alpha\gamma}(r) \quad , \tag{E-43}$$

$$\langle \gamma_\ell, ri \mid \mathcal{O}^{(2)} \mid \widetilde{\gamma'_\ell, r'i'} \rangle = \frac{\delta(r-r')}{r^2} V^{L}_{\gamma\gamma'}(r) + V^{NL}_{\gamma\gamma'}(r,r') \quad . \tag{E-44}$$

où γ désigne à la fois les nombres quantiques γ_ℓ et i.

E.3.2. Séparation des contributions coeur-coeur, coeur-externe et externe-externe.

Les états à N (resp. N-1) nucléons considérés sont du type (D-47) (resp. (D-35)), c'est à dire obtenus par antisymétrisation, couplage et normalisation d'un coeur scalaire $|\widetilde{C}_o\rangle_n$ de n_o particules et d'une couche externe $|\widetilde{e}\ I\rangle_n$ de $n_1 = N-n_o$ (resp. $N-1-n_o$) particules.

Par application de (D-25), les éléments de matrice sur de tels états s'écrivent :

$$M = \langle \widetilde{C}_N \mid \mathcal{O}^{(2)} \mid \widetilde{C'}_N \rangle_m = \langle \widetilde{C}_o(1,\ldots,n_o) O | \widetilde{e}(n_o+1,\ldots,N) I | \mathcal{O}^{(2)} \mathcal{A}(n_o,n_1) (| \widetilde{C}_o(1,\ldots,n_o) O\rangle | \widetilde{e'}(n_o+1,\ldots,N) I \rangle) . \tag{E-45}$$

Regroupons les différentes contributions de l'opérateur $\mathcal{O}^{(2)}$ de la façon suivante :

$$\mathcal{O}^{(2)} = \sum_{i<j,1}^{n_o+n_1} \mathcal{O}_{ij} = \sum_{i<j,1}^{n_o} \mathcal{O}_{ij} + \sum_{i=1}^{n_o} \sum_{j=n_o+1}^{n_o+n_1} \mathcal{O}_{ij} + \sum_{i<j,n_o+1}^{n_o+n_1} \mathcal{O}_{ij} \quad , \tag{E-46}$$

où l'on a supposé $\mathcal{O}_{ij} = \mathcal{O}_{ji}$. Ces trois termes correspondent respectivement aux contributions coeur-coeur, coeur-externe et externe-externe du potentiel.

Détaillons le calcul de la contribution coeur-externe M_{ce}. Les structures C_o et e étant antisymétrisées, M_{ce} s'exprime en fonction de l'élément de matrice de la restriction (cf. E.1) de l'opérateur $\mathcal{O}^{(2)}$ à deux espaces individuels, l'un correspondant à un état du coeur et l'autre à un état de la couche externe ,

par exemple, $\mathcal{O}_{n_o,\, n_o+n_1}$. Cela introduit le facteur de comptage $n_o\, n_1/2$, soit :

$$M_{ce} = \frac{n_o m_1}{2} \; \underset{n}{\langle} \widetilde{C_o 0} | \underset{n}{\langle} \widetilde{e I} | \mathcal{O}_{n_o, n_o+m_1} \mathcal{A}(n_o, n_1) (| \widetilde{C_o 0} \rangle_n | \widetilde{e' I} \rangle_n). \qquad \text{(E-47)}$$

Parmi les $(n_o+n_1)!/n_o!n_1!$ substitutions (D-13) de $\mathcal{A}(n_o,n_1)$, seules l'identité et la transposition entre n_o et n_o+n_1 peuvent donner une contribution non nulle. En effet, l'orthogonalité des états individuels des structures C_o et e conduit pour les autres substitutions, à des intégrales de recouvrement nulles, d'où :

$$M_{ce} = \frac{n_o n_1}{2} \underset{n}{\langle} \widetilde{C_o(n_o) 0} | \underset{n}{\langle} \widetilde{e(n_1)\, I} | \mathcal{O}_{n_o, n_o+n_1} (1 - \mathcal{P}_{n_o, n_o+n_1}) | \widetilde{C_o(n_o) 0} \rangle_n | \widetilde{e'(n_1)\, I} \rangle_n . \qquad \text{(E-48)}$$

La décomposition de M_{ce} en somme d'éléments de matrice à deux corps sur l'espace $\mathcal{E}^{(1)}_{n_o} \otimes \mathcal{E}^{(1)}_{n_o+n_1}$ est la même pour les termes correspondant à 1 et à $\mathcal{P}_{n_o, n_o+n_1}$. La somme de ces deux contributions a pour effet d'antisymétriser le ket des éléments de matrice à deux corps.

En décomposant les structures C_o et e à l'aide des "coefficients associés aux c.p.f." (D-47) et (D-41), on obtient :

$$M_{ce} = \sum_{\substack{n \ell j \\ n' \ell' j'}} \hat{j}\, \hat{1/2}\, \hat{j'}\, \hat{1/2} \sum_{c_{n_1-1}\, c_1} \mathcal{C}^{e}_{c_{n_1-1},\, c_1} \sum_{c'_{n_1-1},\, c'_1} \mathcal{C}^{e'}_{c'_{n_1-1},\, c'_1}$$

$$\Big(\underset{n}{\langle} \widetilde{\text{trou}\; n \ell j} | < j(n_o) | \Big) o \Big(\underset{n}{\langle} \widetilde{C_{n_1-1}} | < C_1(n_o+n_1) | \Big) I\, \mathcal{O}_{n_o, n_o+n_1} (1 - \mathcal{P}_{n_o, n_o+n_1})$$

$$\Big(| \widetilde{\text{trou}\; n' \ell' j'} \rangle_n | j'(n_o) > \Big) o \Big(| \widetilde{C'_{n_1-1}} \rangle_n | C'_1(n_o+n_1) > \Big) I' \; . \qquad \text{(E-49)}$$

Par changement des couplages, on regroupe les termes d'interaction d'une part et de recouvrement d'autre part :

$$M_{ce} = \sum_{\substack{n \ell j \\ n' \ell' j'}} \hat{j}\, \hat{1/2}\, \hat{j'}\, \hat{1/2} \sum_{\substack{c_{n_1-1},\, c_1 \\ c'_{n_1-1},\, c'_1}} \mathcal{C}^{e}_{c_{n_1-1},\, c_1} \mathcal{C}^{e'}_{c'_{n_1-1},\, c'_1} \sum_{\substack{\lambda\, \mu \\ \lambda'\, \mu'}}$$

$$\begin{bmatrix} j & j & 0 \\ I_{n_1-1} & I_1 & I \\ \lambda & \mu & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j' & j' & 0 \\ I'_{n_1-1} & I'_1 & I' \\ \lambda' & \mu' & I' \end{bmatrix} \Big\{ \Big(\underset{n}{\langle} \widetilde{\text{trou}\; n \ell j} | \underset{n}{\langle} \widetilde{C_{n_1-1}} | \Big) \lambda < \Big(j(n_o)\, C_1(n_o+n_1) \Big) \mu \Big\} I$$

$$\mathcal{O}_{n_o, n_o+n_1} (1 - \mathcal{P}_{n_o, n_o+n_1}) \Big\{ \Big(| \widetilde{\text{trou}\; n' \ell' j'} \rangle_n | \widetilde{C'_{n_1-1}} \rangle_n \Big) \lambda' | \Big(j'(n_o)\, C'_1(n_o+n_1) \Big) \mu' > \Big\} I' ,$$

où les couplages correspondent à la fois au spin et à l'isospin.

Pour un opérateur $O^{(2)}$ scalaire en spin et isospin, le théorème de Wigner-Eckart (B-52) et la formule de réduction du produit tensoriel (B-55) permettent d'isoler le terme d'interaction :

$$M_{ce} = \sum_{n\ell j} 2(2j+1) \sum_{C_{n_1-1},C_1,C'_1} \mathcal{C}^{e}_{C_{n_1-1},C_1} \mathcal{C}^{e'}_{C_{n_1-1},C'_1}$$

$$\sum_{\lambda\mu} \begin{bmatrix} j & j & 0 \\ I_{n_1-1} & I_1 & I \\ \lambda & \mu & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j & j & 0 \\ I_{n_1-1} & I'_1 & I \\ \lambda & \mu & I \end{bmatrix} \langle (j,C_1)\mu | O^{(2)} | (\widetilde{j,C'_1})\mu \rangle . \qquad \text{(E-50)}$$

où les "9j carrés" sont en fait le produit des coefficients correspondants pour le spin et l'isospin.

F. METHODES NUMERIQUES DE RESOLUTION DES EQUATIONS

F.1. PRINCIPE DE LA METHODE NUMERIQUE.

Pour résoudre des équations différentielles (C.3.2b) ou des systèmes d'équations intégro-différentielles couplées (II-42) du deuxième ordre et ne dépendant pas explicitement de la dérivée première, nous utilisons la méthode numérique de Cowell [59] (dite aussi de Fox-Goodwin [60]). Elle consiste à discrétiser la variable r suivant un pas h, et à utiliser la relation :

$$g(r+h) - \frac{h^2}{12} g''(r+h) - 2g(r) - \frac{5h^2}{6} g''(r) + g(r-h) - \frac{h^2}{12} g''(r-h)$$

$$= -\frac{h^6}{240} g^{(6)}(r) + O(h^8) \quad , \qquad \text{(F-1)}$$

qui relie les valeurs de la fonction et de sa dérivée seconde en trois points équidistants.

Obtenue par un développement de Taylor-Young, cette formule à trois points s'applique à une fonction g(r) définie et dérivable jusqu'à l'ordre six sur le segment (r-h, r+h), et qui admet au point r une dérivée d'ordre sept.

Différentes méthodes numériques d'intégration, ainsi qu'une discussion des erreurs qu'elles introduisent, sont présentées dans les références [61] et [62].

F.2. INTEGRATION DE L'EQUATION DE SCHRÖDINGER RADIALE A UN CORPS.

F.2.1. Généralités.

Le hamiltonien à un corps considéré en (C.3) est :

$$h = \frac{p^2}{2\mu} + v_1(r) + v_2(r)\,(\vec{l}\cdot\vec{s})_{ij} \quad , \qquad \text{(F-2)}$$

où v_1 et v_2 sont des potentiels isotropes réguliers sur $]0, +\infty[$ et tels

que :

$$\lim_{r\to\infty} r v_1(r) = 0 \quad , \quad \lim_{r\to\infty} r v_2(r) = 0 \quad . \tag{F-3}$$

(la méthode s'étend à un potentiel coulombien).

L'équation de Schrödinger radiale que satisfait la fonction définie à partir de (C-26) par :

$$g_{\varepsilon \ell_j}(r) = r f_{\varepsilon \ell_j}(r) \quad \text{avec} \quad g(0) = 0 \quad , \tag{F-4}$$

est du type homogène suivant :

$$\frac{d^2}{dr^2} g(r) + A(r)\, g(r) = 0 \quad , \tag{F-5}$$

où

$$A(r) = \frac{2M}{\hbar^2}\left[-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - v_1(r) - v_2(r)(\vec{\ell}\cdot\vec{s})_{\ell_j} + \varepsilon\right] \quad . \tag{F-6}$$

En négligeant le second membre de (F-1) et exprimant g" en fonction de g par (F-5), nous obtenons la relation :

$$\left[1+\frac{h^2}{12}A(r+h)\right]g(r+h) - \left[2 - \frac{5}{6}h^2 A(r)\right]g(r) + \left[1+\frac{h^2}{12}A(r-h)\right]g(r-h) = 0 \quad , \tag{F-7}$$

qui relie la valeur de la fonction g en trois points équidistants.

Désignons par $r_i = (i-1)h$ $(i = 1,\ldots,n)$ les points de discrétisation de r et par g_i la valeur de g en ces points, $g_i = g(r_i)$.

Les valeurs de g en deux points sont nécessaires pour initialiser la relation de récurrence (F-7), par exemple :

$$g_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad g_2 = c \tag{F-8}$$

La valeur de c est arbitraire*, l'équation (F-5) étant linéaire, g est en effet définie à un facteur multiplicatif près déterminé par des conditions de normalisation imposées à la fonction g.

---

*Pour des raisons numériques, on choisit cependant $c = h^{\ell+1}$, qui correspond au bon comportement à l'origine de la fonction g.

F.2.2. Etats de diffusion ($\varepsilon \geq 0$).

Avec les conditions initiales (F-8), on détermine de proche en proche les valeurs de g pour des r croissants:

La section efficace est calculée à partir du comportement asymptotique de g, supposé atteint pour la plus grande valeur de r considérée, $r_n = (n-1)h$. Pour cela, r_n doit être supérieur aux portées caractéristiques des potentiels.

a) Etat de diffusion à énergie ε strictement positive.

Dans la région des grandes valeurs de r, où les potentiels (satisfaisant (F-3)) peuvent être négligés, g(r) est une combinaison linéaire des solutions libres régulière et irrégulière à l'origine, soit :

$$g(r) = \alpha kr\, j_\ell(kr) + \beta kr\, y_\ell(kr) \quad , \tag{F-9}$$

avec $k = \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}\varepsilon}$ et j_ℓ et y_ℓ étant les fonctions de Bessel sphériques de première et deuxième espèce[58] (ou les fonctions coulombiennes régulière et irrégulière dans le cas de potentiels coulombiens).

La forme asymptotique de g(r) est :

$$g(r) \underset{r\to\infty}{\simeq} a_\ell \sin(kr - 1/2\,\ell\pi + \delta_\ell) \quad . \tag{F-10}$$

Des comportements asymptotiques respectifs des fonctions de Bessel sphériques :

$$\rho j_\ell(\rho) \underset{\rho\to\infty}{\sim} \sin(\rho - 1/2\,\ell\pi) \quad , \quad \rho y_\ell(\rho) \underset{\rho\to\infty}{\sim} \cos(\rho - 1/2\,\ell\pi) \quad , \tag{F-11}$$

on déduit le déphasage δ_ℓ,

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= A\cos\delta_\ell \\ \beta &= A\sin\delta_\ell \end{aligned}\right\} \quad , \quad \operatorname{tg}\delta_\ell = \frac{\beta}{\alpha} \quad . \tag{F-12}$$

Les paramètres α et β sont déterminés à partir des valeurs de g, obtenues par résolution numérique de l'équation différentielle, en deux points correspondant à de grandes valeurs de r, par exemple r_{n-1} et r_n.

Remarques : 1 - L'ambiguité sur le déphasage δ_ℓ, défini ci-dessus à $2n\pi$ près, peut être levée en faisant varier le potentiel depuis 0 jusqu'à sa valeur A(r) et en suivant par continuité la valeur du déphasage[15].

2- On "normalise" la fonction g, en multipliant la solution obtenue par le facteur $1/\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ pour avoir la forme asymptotique suivante :

$$g(r) \underset{r\to\infty}{\sim} \sin(kr - 1/2\,\ell\pi + \delta_\ell) \quad . \tag{F-13}$$

La section efficace est :

$$\sigma_\ell = \frac{4\pi}{k^2}(2\ell+1)\sin^2\delta_\ell \quad . \tag{F-14}$$

b) Etats de diffusion à énergie ε nulle.

La forme asymptotique de g(r) est alors :

$$g(r) \underset{r\to\infty}{\sim} a\left(1-\frac{r}{b}\right) \quad , \tag{F-15}$$

où $b = -\lim_{k\to 0}(\mathrm{tg}\,\delta)/k$ est la longueur de diffusion.

Comme précédemment, les paramètres a et b sont déterminés à partir des valeurs de g en deux points de r grand (r_n et r_{n-1} par exemple).

On normalise la fonction g en divisant la solution obtenue par a, pour avoir la forme asymptotique 1 - r/b.

La section efficace est :

$$\sigma = 4\pi b^2 \quad . \tag{F-16}$$

F.2.3. Etats liés ($\varepsilon < 0$).

On traite de façon semblable les deux problèmes suivants :

- déterminer l'énergie de liaison ε d'un état n,ℓ,j (si celui-ci est lié) dans un potentiel donné,

- déterminer la profondeur v_o d'un potentiel (C-39) qui lie un état ε, n, ℓ, j donné.

La méthode exposée en (F.2.1) peut être utilisée de la façon suivante. Pour les grandes valeurs de r, la solution g(r) est, à priori, une combinaison linéaire d'exponentielles décroissante et croissante :

$$g(r) = \alpha e^{-kr} + \beta e^{+kr} \quad , \tag{F-17}$$

avec $k = \sqrt{2\mu|\varepsilon|/\hbar^2}$. La valeur de ε (resp. v_o) cherchée est celle qui annule

le coefficient β de l'exponentielle croissante à l'infini. On montre (propriétés du Wronskien[63]) que β/α s'annule en changeant de signe. Un pas de recherche permet d'encadrer la valeur de ε(resp. v_o) que l'on détermine ensuite par dichotomie. La fonction d'onde correspondante doit avoir le nombre de noeuds n (origine exclue et infini inclus) désiré.

Nous utiliserons cette méthode en (F.3.3), cependant elle présente l'inconvénient d'introduire des erreurs numériques sur la fonction d'onde. En effet, même avec un coefficient β très petit ("annulé" numériquement à 10^{-9} près), pour les grandes valeurs de r, le terme βe^{+kr} n'est pas négligeable devant αe^{-kr}.

Nous déterminerons donc les fonctions radiales du potentiel à un corps (C-39, 40) en imposant à la solution le bon comportement exponentiellement décroissant à l'infini. Pour cela, on intègre la relation de récurrence (F-7) d'une part pour des valeurs croissantes de r avec les valeurs initiales (F-8) et d'autre part pour des valeurs décroissantes de r à partir des valeurs initiales :

$$g_{m-1} = \alpha e^{-kr_{m-1}} \quad , \quad g_m = \alpha e^{-kr_m} \quad . \qquad \text{(F-18)}$$

On raccorde ces deux solutions ainsi que leurs dérivées logarithmiques en une valeur intermédiaire de r. On montre[63] que les dérivées logarithmiques des solutions précédentes sont respectivement des fonctions croissante et décroissante de l'énergie, d'où l'existence de la valeur ε (resp. v_o) cherchée.

Finalement la solution obtenue est normalisée à l'unité en tenant compte de la correction de queue due à la contribution pour $r \geq r_n$ à l'intégrale de norme. De zéro à r_n cette intégrale est calculée par le méthode des trapèzes, soit :

$$\int_0^\infty g(r)^2 dr \approx \left[\sum_{i=2}^{m-1} g_i^2 h + \frac{1}{2} g_m^2 h \right] + \frac{1}{2k} g_m^2 \quad . \qquad \text{(F-19)}$$

Cette correction est également importante pour tester l'orthogonalité des fonctions d'onde radiales d'états de nombres quantiques différents. On a de la même façon avec des notations évidentes :

$$\int_0^\infty g_{(1)}(r)\, g_{(2)}(r)\, dr \approx \left[\sum_{i=2}^{m-1} g_{(1)i}\, g_{(2)i}\, h + \frac{1}{2} g_{(1)m}\, g_{(2)m}\, h \right] + \frac{g_{(1)m}\, g_{(2)m}}{k_1 + k_2} \quad . \qquad \text{(F-20)}$$

F.3. RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS INTEGRO-DIFFERENTIELLES COUPLEES.

F.3.1. Mise sous forme matricielle MX = Y.

Nous limitons notre étude au cas comprenant une seule voie de réaction γ . La forme générale du système d'équations intégro-différentielles (II-42) est alors la suivante :

$$\begin{cases} \sum_{\alpha'} A_{\alpha\alpha'} a_{\alpha'} + \int_0^\infty dr\, B_\alpha(r)\, g(r) = 0 & \text{(F-21a)} \\ \sum_{\alpha'} C_{\alpha'}(r) a_{\alpha'} + \dfrac{d^2}{dr^2} g(r) + D(r) g(r) + \int_0^\infty dr' E(r,r') g(r') = 0 , & \text{(F-21b)} \end{cases}$$

où on a omis l'indice γ de la voie et posé :

$$g(r) = r\varphi(r) \quad . \tag{F-22}$$

Les inconnues sont les n_α coefficients a_α et la fonction d'onde radiale de diffusion $g(r)$ satisfaisant $g(o) = 0$.

L'équation (F-21b) est du type inhomogène :

$$\frac{d^2}{dr^2} g(r) + V(r)\, g(r) + W(r) = 0 \tag{F-23}$$

où,

$$V(r) = D(r) \tag{F-24}$$

$$W(r) = \sum_{\alpha'} C_{\alpha'}(r) a_{\alpha'} + \int_0^\infty dr' E(r,r') g(r') \quad . \tag{F-25}$$

De la même façon que pour l'équation homogène (F-5), en négligeant le second membre de (F-1) et exprimant g" en fonction de g par (F-23), nous obtenons la relation suivante :

$$\left[1+\frac{h^2}{12} V(r+h)\right] g(r+h) - \left[2-\frac{5}{6} h^2 V(r)\right] g(r) + \left[1+\frac{h^2}{12} V(r-h)\right] g(r-h) + \frac{h^2}{12}\left[W(r-h) + 10\, W(r) + W(r+h)\right] = 0 \quad . \tag{F-26}$$

Mais dans notre cas W(r) est une fonctionnelle de g définie par le terme intégral $\int_0^\infty dr' E(r,r')\, g(r')$ et donc dépend de l'ensemble des valeurs de g ; il en est de même du terme intégral des équations (F-21a).

La variable r étant discrétisée suivant le pas $h(r_i = (i-1)h,\ i = 1,\ldots,n)$, nous introduisons les notations suivantes :

$$g_i = g(r_i) \quad , \quad B_{\alpha i} = B_\alpha(r_i) \quad , \quad C_{i\alpha'} = C_{\alpha'}(r_i)$$

$$E_{ij} = E(r_i, r_j) \quad . \tag{F-27}$$

Les termes intégraux sont calculés par la méthode des trapèzes, soit

$$\int_0^\infty dr\, B_\alpha(r) g(r) \approx \sum_{i=2}^{n-1} h B_{\alpha i} g_i + \frac{1}{2} h B_{\alpha n} g_n \quad ,$$
$$\int_0^\infty dr'\, E(r_i, r') g(r') \approx \sum_{j=2}^{n-1} h E_{ij} g_j + \frac{1}{2} h E_{in} g_n \quad . \tag{F-28}$$

Introduisant ces expressions dans (F-21) et (F-26), nous sommes ramenés à résoudre un système linéaire de $n_\alpha + n-2$ équations à $n_\alpha + n-1$ inconnues : les n_α amplitudes a_α et les n-1 valeurs de g pour r_i, $i = 2,\ldots,n$, (compte tenu que $g(o) = 0$).

Pour cela, on choisit arbitrairement une valeur de g, par exemple g_n dont on isole la dépendance, pour chaque équation, dans le second membre. On obtient ainsi un système d'équations linéaires de la forme :

$$MX = Y \quad , \tag{F-29}$$

où M est une matrice carrée de dimension $n_\alpha + n-2$, le second membre Y dépend linéairement de g_n, et X est le vecteur colonne des inconnues :

$$X = \begin{pmatrix} a_\alpha \\ \cdots \\ g_i \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \alpha = 1, \ldots, n_\alpha \\ i = 2, \ldots, n-1 \end{matrix} \quad . \tag{F-30}$$

La valeur des éléments de matrice de M et du second membre Y en fonction de A, B, C, D et E, est indiquée dans la Figure 17.

F.3.2. Résolution numérique de l'équation matricielle MX = Y.

Nous utilisons la méthode de Cholesky [64] qui consiste à factoriser la matrice carrée M (de dimensions N × N) en un produit de deux matrices triangulaires, l'une inférieure I, et l'autre supérieure S dont les éléments diagonaux S_{ii} sont égaux à 1 :

$$M = IS \quad , \quad (M_{ij}) = \begin{pmatrix} \diagdown & 0 \\ I_{ij} & \diagdown \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & S_{ij} \\ 0 & \diagdown \end{pmatrix} \tag{F-31}$$

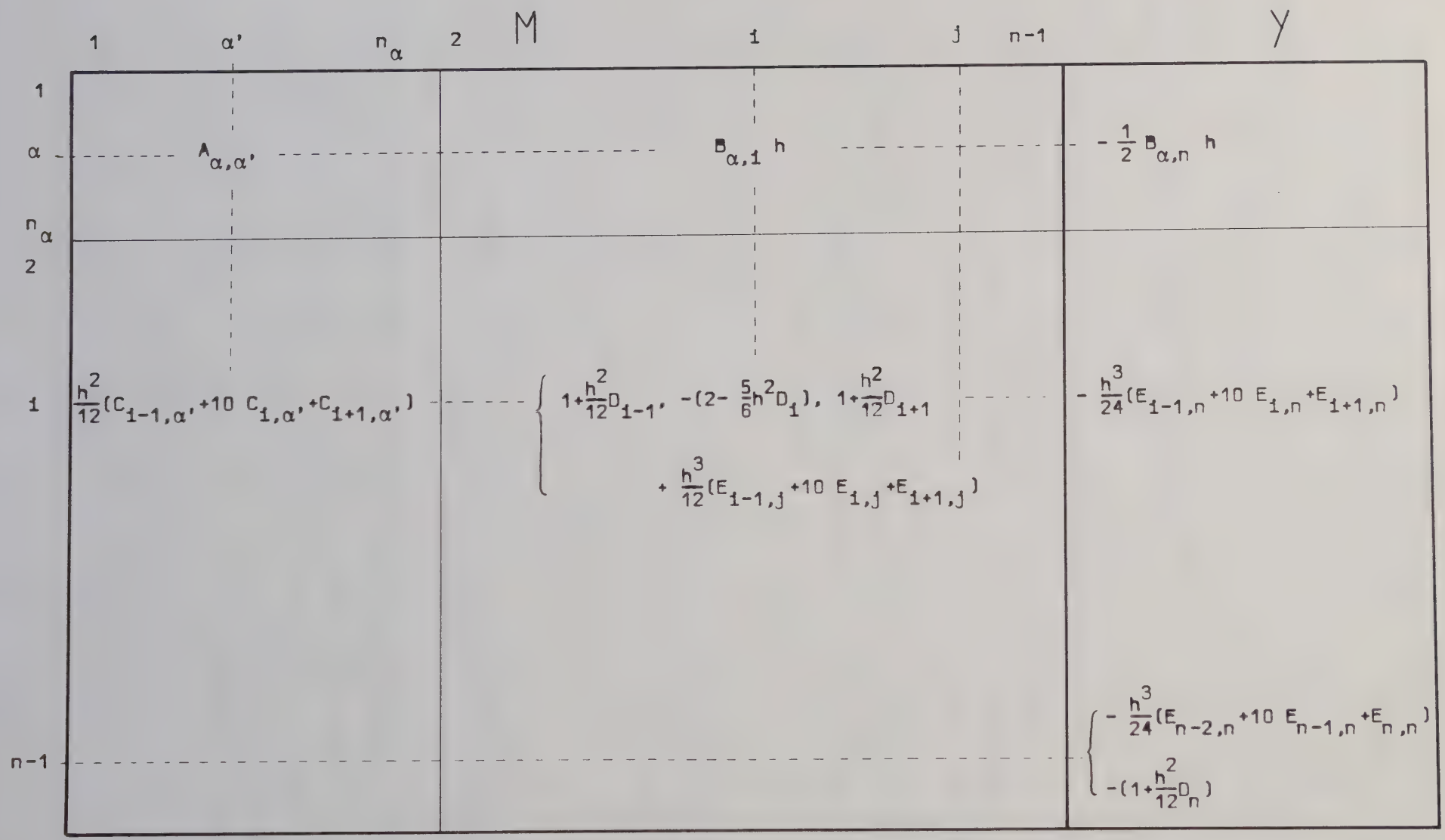


Figure 17 : Eléments de matrice de M et du second membre Y (F-29), indices notés dans l'ordre ligne-colonne.

L'identification des éléments de matrice des deux membres conduit aux relations (les indices sont notés dans l'ordre ligne-colonne) :

$$\begin{cases} I_{i1} = M_{i1} \\ S_{1i} = \dfrac{M_{1i}}{I_{11}} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, N \tag{F-32}$$

$$\begin{cases} I_{iR} = M_{iR} - \sum_{e=1}^{R-1} I_{ie} S_{eR} & R = 2, \ldots, N \\ S_{Rj} = \dfrac{1}{I_{RR}} \left(M_{Rj} - \sum_{e=1}^{R-1} I_{Re} S_{ej} \right) & i \text{ et } j = R, \ldots, N . \end{cases} \tag{F-33}$$

Les éléments diagonaux de I sont différents de zéro car le déterminant non nul de la matrice régulière M a pour valeur :

$$\det M = \det I \cdot \det S = \prod_{i=1}^{N} I_{ii} \quad .$$

Les équations (F-32) définissent la première colonne de I et la première ligne de S. Puis par récurrence, les équations (F-33) déterminent la $k^{ième}$ colonne (resp. ligne) de I (resp. S), les colonnes (resp. lignes) précédentes (1 à k-1) étant connues.

Une fois I et S obtenus, X est calculé de la façon suivante :

Posons SX = Z et donc IZ = Y, soit en termes d'éléments de matrice :

$$\begin{cases} Z_1 = \dfrac{Y_1}{I_{11}} \\ Z_i = \dfrac{1}{I_{ii}} \left(Y_i - \sum_{R=1}^{i-1} I_{iR} Z_R \right) & i = 2, \ldots, N \end{cases} \tag{F-34}$$

$$\begin{cases} X_n = Z_n \\ X_{n-i} = Z_{n-i} - \sum_{R=n-i+1}^{n} S_{n-i,R} X_R & i = 1, \ldots, N-1 . \end{cases} \tag{F-35}$$

Les équations (F-34) déterminent Z_i par récurrence pour les i croissant de 1 à N ; puis par (F-35) on obtient X_j pour les j décroissant de N à 1.

F.3.3. Comportement asymptotique de g(r) et résultats.

Aux grandes valeurs de r, l'équation (F-21b) se réduit à l'équation différentielle :

$$\frac{d^2}{dr^2} g(r) + \varepsilon_{\gamma_e} g(r) = 0 \quad , \quad \varepsilon_{\gamma_e} = E - E_{\gamma_e} \quad . \tag{F-36}$$

Suivant le signe de $\varepsilon_{\gamma_\ell}$, on distingue les cas suivants :

-Pour une voie de réaction ouverte, on détermine le déphasage ($\varepsilon_{\gamma_\ell} > 0$) ou la longueur de diffusion ($\varepsilon_{\gamma_\ell} = 0$) suivant la méthode exposée en (F.2.2). L'ensemble de la solution $(a_\alpha, g(r))$ des équations (F-21) est alors normalisé en choisissant g_n tel que le comportement asymptotique de g(r) soit :

$$\underset{r\to\infty}{g(r)} \sim \begin{cases} \sin(kr - 1/2\,\ell\pi + \delta) & \varepsilon_{\gamma_\ell} > 0 \\ 1 - \dfrac{r}{b} & \varepsilon_{\gamma_\ell} = 0 \end{cases} \quad \text{(F-37)}$$

-Dans le cas de la diffusion à énergie nulle, on calculera le recouvrement entre la fonction d'onde de diffusion obtenue et celles des états de même nombre quantique i(II-60) liés dans le potentiel à un corps considéré. Pour cela, comme en (F.2.3) on devra tenir compte de la correction de queue ; soit avec les mêmes notations qu'en (F-20) :

$$\int_0^\infty g_{mi}(r)\, g(r)\, dr \approx \int_0^{r_m} g_{mi}(r)\, g(r)\, dr + \frac{g_{mi}(r_m)}{k_{mi}} \left(1 - \frac{r_m}{b} - \frac{1}{b k_{mi}}\right) \quad \text{(F-38)}$$

On déterminera également la portée effective (III-16) définie par :

$$r_e = 2\int_0^\infty \left[\left(1 - \frac{r}{b}\right)^2 - g(r)^2\right] dr \quad , \quad \text{(F-39)}$$

où l'intégrale de 0 à r_n sera évaluée par la méthode des trapèzes (la correction de queue est ici nulle).

Dans le cas $\varepsilon_{\gamma_\ell} < 0$, le problème n'a de solutions correspondant à un état lié avec g(r) ayant un comportement exponentiellement décroissant à l'infini, que pour des valeurs déterminées de $\varepsilon_{\gamma_\ell}$. Ces valeurs (ou, problème équivalent, la profondeur du potentiel conduisant à un $\varepsilon_{\gamma_\ell}$ donné) sont déterminées suivant la première méthode exposée en (F.2.3). La solution $(a_\alpha, g(r))$ est normalisée en choisissant g_n tel que g(r) soit normalisée à 1 où, comme en (F.2.3) on tient compte de la correction de queue.

F.3.4. Calculs numériques.

La résolution numérique de problèmes solubles analytiquement nous a permis d'avoir une idée de la précision des méthodes exposées ci-dessus. Nous avons utilisé pour cela des potentiels locaux et non locaux carrés, nous plaçant ainsi dans une situation défavorable puisque ces potentiels étant discontinus, les conditions d'application de la formule à trois points (F.1) ne sont pas satisfaites.

Néanmoins la convergence de ces méthodes en fonction du nombre de points de discrétisation est bonne : avec des potentiels carrés de longueur 3 fm (ordre de grandeur des rayons quadratiques moyens des noyaux étudiés) et de profondeur -40 Mev, les résultats sont stables à partir de 50 points de discrétisation avec un pas de 0.2 fm.

Si au lieu des fonctions radiales d'un oscillateur harmonique , on utilise celles des états liés d'un puits de Wood-Saxon, les potentiels de diffusion (E-43, 44), en particulier les termes correctifs dus à l'antisymétrisation avec l'état 2s , s'étendent beaucoup plus loin :

Ex : rayon quadratique moyen de l'état 2s de O^{16} (Fig. 4)
oscillateur harmonique (Tab. 2) : 3.426 fm,
Wood-Saxon (Tab. 6) : 4.130 fm.

Dans ce cas nous utilisons 100 points de discrétisation avec le même pas de 0.2 fm.

La programmation des calculs a été réalisée en Fortran, et l'exécution en double précision a eu lieu sur un calculateur IBM 360 91.

REFERENCES

[1] - A. Abragam, G.L. Bacchella, H. Glättli, P. Mériel, J. Piesvaux et M. Pinot - C.R. Acad. Sci. Paris 274 (1972) 423.

A. Abragam, G.L. Bacchella, H. Glättli, P. Mériel, J. Piesvaux, M. Pinot et P. Roubeau - Proc. of the Seventeenth Congress Ampère Turku, Finland, 21-26 August, 1972 (North-Holland, Amsterdam).

A. Abragam - Trends in Physics. (European Physical Society, Geneva, Switzerland, 1973), p. 177.

[2] - M. Chapellier, M. Goldman, Vu Hoang Chau et A. Abragam - C.R. Acad. Sci. Paris 268 (1969) 1530.

M. Goldman, M. Chapellier, Vu Hoang Chau et A. Abragam - Phys. Rev. B 10 (1974) 226.

[3] - G.E. Bacon - Acta Cryst., A28 (1972) 357.

[4] - A. Abragam, G.L. Bacchella, C. Long, P. Mériel, J. Peisvaux et M. Pinot - Phys. Rev. Lett. 28 (1972) 805.

[5] - C.G. Shull et R.P. Ferrier - Phys. Rev. Lett. 10 (1963) 295.

Y. Ito et C.G. Shull - Phys. Rev. 185 (1969) 961.

[6] - A. Herpin et P. Mériel - J. Physique 34 (1973) 423.

[7] - A. Abragam, G.L. Bacchella, H. Glättli, P. Mériel, M. Pinot et J. Piesvaux - Phys. Rev. Lett. 31 (1973) 776.

P. Roubeau, A. Abragam, G.L. Bacchella, H. Glättli, A. Malinovski, P. Mériel, J. Piesvaux et M. Pinot - Phys. Rev. Lett. 33 (1974) 102.

[8] - C. Bloch et V. Gillet - Phys. Lett. 16 (1965) 62.
V. Gillet et C. Bloch - Phys. Lett. 18 (1965) 58.

[9] - C. Bloch - Proc. XXXVI Int. School of Physics, Enrico Fermi Course (Academic Press, New York, 1966).

C. Bloch - "Many-body description of nuclear structure and reactions", Academic Press, New York (1966).

[10] - C. Mahaux et Hans A. Weidenmüller -"Shell-model approach to nuclear reactions", North-Holland (1969).

[11] - E.C. Halbert, J.B. Mc Grory, B.H. Wildenthal et S.P. Pandya - Adv. in Nucl. Phys. Vol 4, Chap. 6.

[12] - M.H. Macfarlane - Proc. XL Int. School of Physics, Enrico Fermi Course (Academic Press, New York, 1969).

[13] - J. Raynal, M.A. Melkanoff et T. Sawada - Nucl. Phys., A101 (1967) 369.

[14] - B. Giraud, J.C. Hocquenghem et A. Lumbroso - Phys. Rev. C, 7 (1973) 2274.

[15] - A. Messiah -"Mécanique Quantique", Tome I (X-20) Dunod (1964).

[16] - J.P. Blaizot, B. Grammaticos et G. Ripka - Communication privée.

[17] - F. Ajzenberg-Selove et T. Lauritsen - Nucl. Phys., A114 (1968) 1.

[18] - F. Ajzenberg-Selove - Nucl. Phys., A152 (1970) 1.

[19] - F. Ajzenberg-Selove et T. Lauritsen - Nucl. Phys., 11 (1959) 1.

[20] - V. Gillet - Thèse à l'Université de Paris (1962).

[21] - I. Sick et J.S. Mc Carthy -Nucl. Phys., A150 (1970) 631.

[22] - P. Brix - "Electron scattering and nuclear structure" Cagliari, Sept. (1970).

[23] - H. Ehrenberg -"Nuclear structure studies using electron scattering and Photoreaction" - Sendai 12-15 Sept. (1972).

[24] - J.W. Negele - Phys. Rev., C1 (1970) 1260.

H.A. Bethe -"Proceeding of the Symposium on the two-body force in nuclei", Gull Lake Michigan, Sept. (1971).

[25] - G. Ripka - Thèse à l'Université de Paris (1967).

[26] - V. Gillet, B. Giraud et M. Rho - Phys. Rev., 178 (1969) 1695.

[27] - V. Gillet - "Sur la nature des fonctions d'onde nucléaires". Aussois (1968).

[28] - A. Zuker - Communication privée.

[29] - S. Kahana, H.C. Lee et C.K. Scott - Phys. Rev., 185 (1969) 1378.

[30] - J.H.E. Mattauch, W. Thiele et A.H. Wapstra - Nucl. Phys., 67 (1965)1.

[31] - A. Arima, S. Cohen, R. Lawson et M. Mac Farlane - Nucl. Phys. A108 (1968) 94.

[32] - V. Gillet et J.M. Normand - Nucl. Phys., A176 (1971) 225.

[33] - J.L. Fowler et H.O. Cohn - Phys. Rev., 109 (1958) 89.

C.H. Johnson et J.L. Fowler - Phys. Rev., 162 (1967), 890.

[34] - Willard, Bair et Kington - Phys. Rev., 98 (1955) 669.
J.E. Wills - Bull. Am. Phys. Soc., Ser.II, 1 (1956) 175.

[35] - J.T. Reynolds, C.J. Slavik, C.R. Lubitz et N.C. Francis - Phys. Rev., 176 (1968) 1213.

[36] - A. Mori et T. Terasawa - Prog. Theor. Phys., 48 (1972) 826.

[37] - C.B. Dover et Nguyen Van Giai - Nucl. Phys., A177 (1971) 559.

[38] - F. Ajzenberg-Selove - Nucl. Phys., A190 (1972) 1.

[39] - J.L. Escudié, R. Lombard, M. Pignanelli, F. Resmini et A. Tarrats - Preprint.

[40] - M. Soyeur et A. Zuker - Communication privée.

[41] - P. Mériel - Communication privée.

[42] - F. Gabbard, R.H. Davis et T.W. Bonner - Phys. Rev., 114 (1959) 201.

[43] - C. Bloch -"La théorie statistique des réactions nucléaires considérée comme un problème de communication", Aussois (1968).

[44] - W. Marshall et S.W. Lovesey -"Theory of thermal neutron scattering", Oxford, Clarendon Press (1971).

[45] - P. Moussa et R. Stora - "Angular analysis of elementary particle reactions" Herceg Novi (Yougoslavie) (1966).

[46] - E.P. Wigner -"Group theory and its application to the quantum mechanics of atomic spectra", (Academic Press Inc. New-York, 1959).

[47] - P. Moussa - Thèse à l'Université de Paris (1968).

[48] - V. Bargmann - Rev. of Mod. Phys., 34 (1962) 829.

[49] - U. Fano et G. Racah - "Irreducible tensorial sets", (Academic Press Inc., New-York, 1959).

[50] - A. Messiah -"Mécanique quantique", Tome II (XIII-9 et 32), Dunod (1964).

[51] - M. Danos - Ann. Phys., 63 (1971) 319.

[52] - I.S. Gradshteyn et I.M. Ryzhik - "Table of integrals, Series and Products", (Academic Press, 1965).

[53] - J. Raynal - "Spin-orbit interaction in inelastic nucleon scattering. The structure of nuclei", Trieste (1971).

[54] - B. Mottelson - Proceeding of the International School of Physics - Enrico Fermi Course XV (Academic Press Inc., New York, 1960), p.45.

M. Danos et V. Gillet - Phys. Rev., 161 (1967) 1034.

[55] - A. de Shalit et I. Talmi - "Nuclear shell theory" (Academic Press New-York and London 1963).

[56] - I. Talmi - Helv. Phys. Acta, 25 (1952) 185.
M. Moshinsky - Nucl. Phys.,13 (1959) 104.
Yu. F. Smirnov - Nucl. Phys.,27 (1961) 177.

[57] - J. Raynal et J. Revai -Nuov. Cim. 68A (1970) 612.

[58] - M. Abramowitz et I.A. Stegun - N.B.S. Applied Mathematics Series 55 (1964).

[59] - P.H. Cowell et A.C.D. Crommelin - Appendix to Greenwich Observations for 1909 p.84 as quoted by Henrici (1962) - (1910).

P. Henrici - "Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations", Wiley New-York (1962).

[60] - L. Fox et E.T. Goodwin - Proc. Cambridge Phil. Soci., 45 (1949) 373.

[61] - M.A. Melkanoff, T. Sawada et J.Raynal - "Nuclear Optical Model Calculations" - Methods in Computational Physics, Academic Press, New-York and London (1965).

[62] - J. Raynal - "Equation Couplées et DWBA", Aussois (France) (1968).

[63] - A. Messiah - "Mécanique Quantique" - Tome I (III-8), Dunod (1964).

[64] - D.R. Hartree, F.R.S. - "Numerical Analysis" - Oxford second edition (1957).